Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

TRIGONOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES TRIGOMÉTRICAS DIRECTAS

Nociones Previas:

Función es un conjunto de pares ordenados donde no hay dos pares (diferentes) con un mismo primer elemento. Se llama **dominio** al conjunto de todos los primeros elementos y **rango** al conjunto de todos los segundos elementos.

Por ejemplo: $F = \{(2;3), (1;-2), (0;4), (-2;5)\}$

El conjunto F es una función

$\text{Dominio} = \{-2; 0; 1; 2\}$ y $\text{Rango} = \{-2; 3; 4; 5\}$

Dada una función $F = \{(x;y)/y = F(x)\}$ se llama **dominio** al conjunto de valores que puede tomar x (variable independiente) y **rango** al conjunto de valores que puede tomar y (variable dependiente).

Funciones especiales:

- $\mathbf{F(x) = x^2}$

  Dominio: $\mathbb{R}$

  Rango: $[0; +\infty[$

- $\mathbf{G(x) = \sqrt{x}}$

  Dominio: $[0; +\infty[$

  Rango: $[0; +\infty[$

- $\mathbf{H(x) = \frac{1}{x}}$

  Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

  Rango: $\mathbb{R} - \{0\}$

1. Regla de correspondencia:

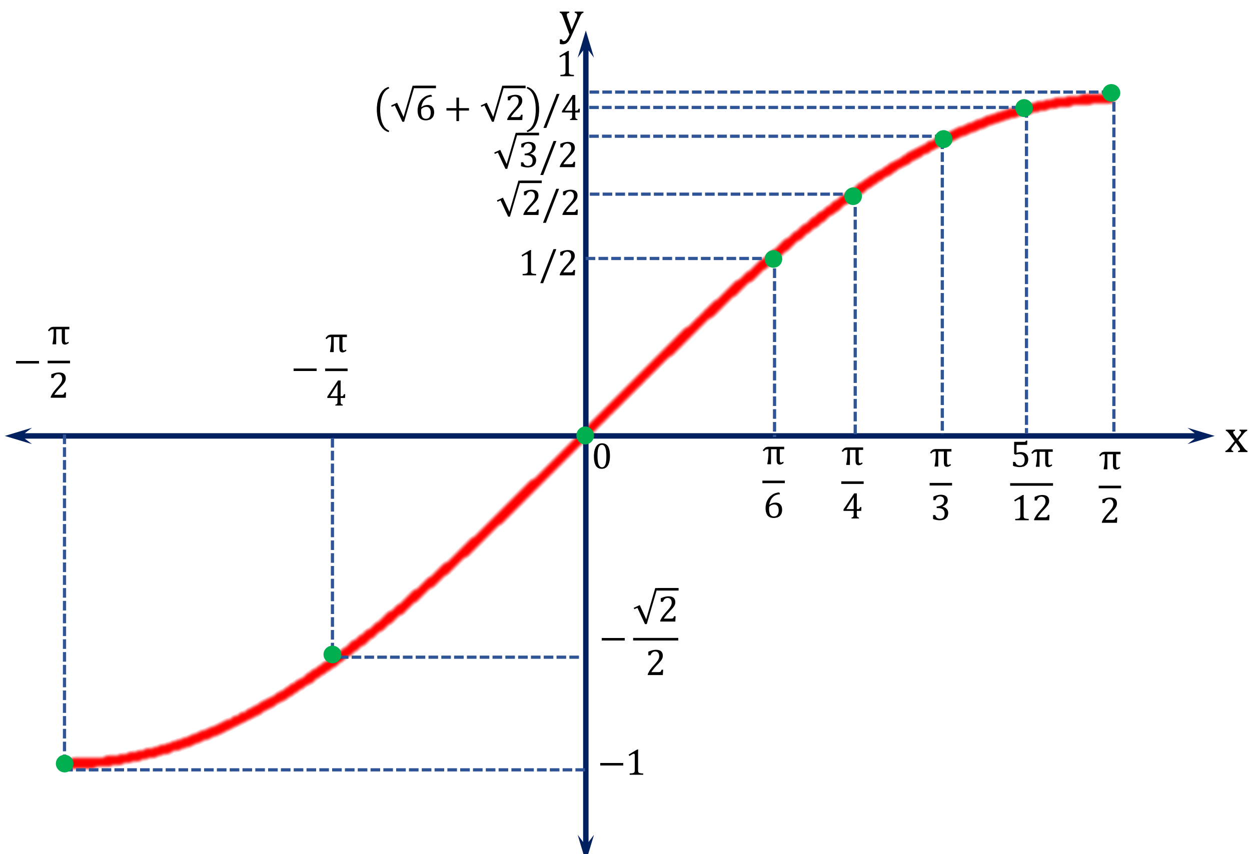
Es la representación formal (matemática) de la relación que existe entre la variable o variables independientes con la variable dependiente. Según la anterior su representación será:

$$\mathbf{F(x) = \{(x; y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = RT(x)\ \}}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UNA VARIABLE REAL

- Función Seno: $F(x) = \{(x; y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = \text{Sen}x\}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1



2.Dominio(D_f)

Es el conjunto de valores que **admite** la variable “x” o primera componente ,para que la función la función exista o este definida.

Función	Dominio(x)
$y = Senx$	$\mathbb{R}$
$y = Cosx$	$\mathbb{R}$
$y = Tanx$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = Cotx$	$\mathbb{R} - \{n\pi\}$
$y = Secx$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = Cscx$	$\mathbb{R} - \{n\pi\}$

$n \in \mathbb{Z}$

- $F(x) = \dfrac{G(x)}{H(x)} \longrightarrow H(x) \neq 0$
- $F(x) = \sqrt[par]{G(x)} \longrightarrow G(x) \geq 0$

Ejemplo:

Hallar el dominio de: $F(x) = \operatorname{Sec}\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

Resolución:

$$F(x) = \frac{1}{\boxed{\operatorname{Cos}\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)}} \longrightarrow \neq \mathbf{0}$$

$$\operatorname{Cos}\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$$

$$\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3} \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3x}{4} \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{3x}{4} \neq \frac{(6n+3)\pi + 2\pi}{6}$$

$$\frac{3x}{\cancel{4}} \neq \frac{(6n+5)\pi}{\cancel{6}}$$

$$x \neq (12n+10)\frac{\pi}{9}$$

$$\therefore \mathbf{DomF} = \mathbb{R} - \left\{(\mathbf{12n} + \mathbf{10})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{9}}; \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ejemplo:

Calcular el dominio de: $G(x) = \sqrt{\text{Senx} - \sqrt{|\text{Senx}| - 1}}$

Resolución:

$$G(x) = \sqrt{\text{Senx} - \sqrt{\underbrace{|\text{Senx}| - 1}_{\geq 0}}} \longrightarrow |\text{Senx}| - 1 \geq 0 \longrightarrow |\text{Senx}| \geq 1 \begin{cases} |\text{Senx}| > 1 \ ✘ \\ |\text{Senx}| = 1 \longrightarrow \text{Senx} = 1 \ \vee \ \text{Senx} = -1 \end{cases}$$

- Si: $\text{Senx} = -1 \longrightarrow G(x) = \sqrt{(-1) - 0}$ No tiene solución en $\mathbb{R}$
- Si: $\text{Senx} = 1 \longrightarrow x = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \textbf{DomG} = \left\{ (\mathbf{4n+1})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} ; \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.Rango(R_f)

Es el conjunto de valores que **toma** la variable “y” o la función a partir del dominio.

Función	Rango(y)
$y = \text{Senx}$	$[-1; 1]$
$y = \text{Cosx}$	$[-1; 1]$
$y = \text{Tanx}$	$\mathbb{R}$
$y = \text{Cotx}$	$\mathbb{R}$
$y = \text{Secx}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$
$y = \text{Cscx}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

Ejemplo:

Dadas las funciones: $F(x) = \{(x;y)/y = 4\text{Sen}x + 3; x \in \mathbb{R}\}$ y $G(x) = \{(x;y)/y = 2\text{Cos}^2x + 6; x \in \mathbb{R}\}$

Hallar: $\text{RanF} \cap \text{RanG}$

Resolución:

- Analizando la función F:

$y = 4\text{Sen}x + 3$

$$-1 \leq \text{Sen}x \leq 1$$
$$-4 \leq 4\text{Sen}x \leq 4$$
$$-1 \leq \underbrace{4\text{Sen}x + 3}_{y} \leq 7$$

$\text{RanF} = [-1; 7]$

- Analizando la función G:

$y = 2\text{Cos}^2x + 6$

$$-1 \leq \text{Cos}x \leq 1$$
$$0 \leq \text{Cos}^2x \leq 1$$
$$0 \leq 2\text{Cos}^2x \leq 2$$
$$6 \leq \underbrace{2\text{Cos}^2x + 6}_{y} \leq 8$$

$\text{RanG} = [6; 8]$

- Piden: $\text{RanF} \cap \text{RanG}$

$$[-1; 7] \cap [6; 8]$$

$$[\mathbf{6}; \mathbf{7}]$$

Ejemplo:

Calcular el rango de: $F(x) = \dfrac{\text{Sen}|x|}{\text{Senx}} + \dfrac{\text{Cos}|x|}{\text{Cosx}};\ x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolución:

- Analizamos dos casos, si $x < 0$ y si $x > 0$
- Si: $x < 0 \longrightarrow |x| = -x \longrightarrow \text{Sen}|x| = \text{Sen}(-x) = -\text{Senx}$

$$\text{Cos}|x| = \text{Cos}(-x) = \text{Cosx}$$

$$F(x) = \frac{-\text{Senx}}{\text{Senx}} + \frac{\text{Cosx}}{\text{Cosx}} = -1 + 1 = 0$$

- Si: $x > 0 \longrightarrow |x| = x \longrightarrow \text{Sen}|x| = \text{Senx}$

$$\text{Cos}|x| = \text{Cosx}$$

$$F(x) = \frac{\text{Senx}}{\text{Senx}} + \frac{\text{Cosx}}{\text{Cosx}} = 1 + 1 = 2$$

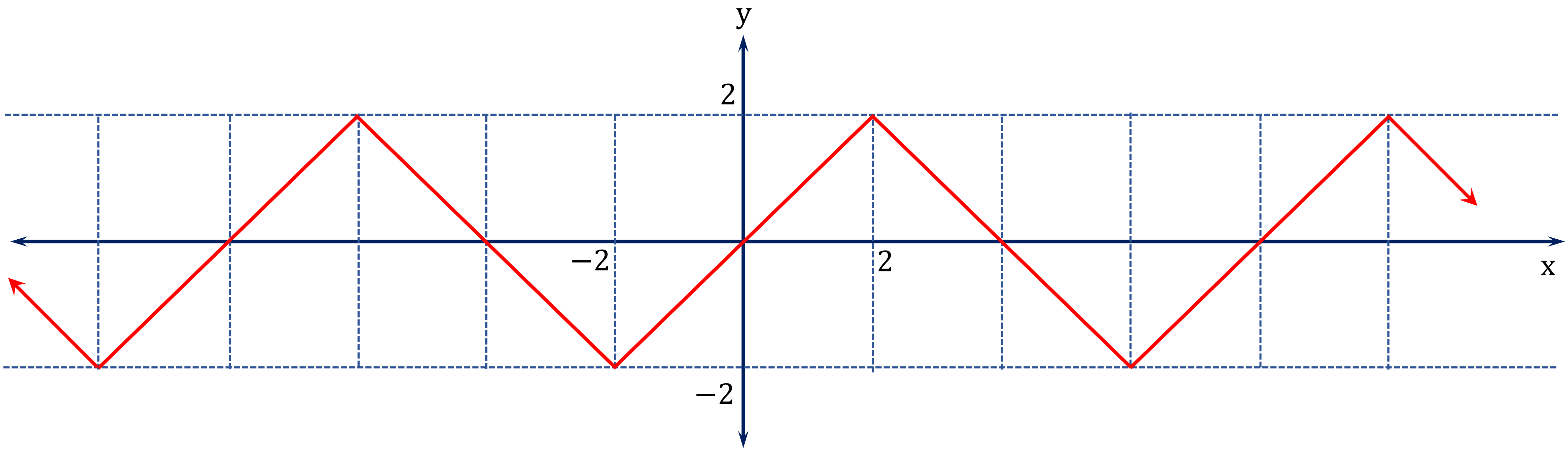
Conclusión: $\text{RanG} = \{0; 2\}$

4.Periodo(T)

Una función F es periódica si existe un número real "T" diferente de cero, tal que siempre "x" esté en el dominio de F, entonces "x+T" también está en el dominio de F , además:

$$\mathbf{F(x) = F(x + T)}$$

El número T es un periodo de F. Al menor valor positivo de T se le denomina periodo mínimo o simplemente periodo.



Aplicación: Determinar el periodo mínimo de F(x)= Sen3x

$$F(x) = F(x+T)$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}3(x+T)$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}(3x+3T)$$

I) $\text{Sen}(3x+3T) - \text{Sen}3x = 0$

$$2\text{Sen}\left(\frac{3T}{2}\right)\text{Cos}\left(3x+\frac{3T}{2}\right) = 0$$

$$\text{Sen}\left(\frac{3T}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{3T}{2}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$T = \frac{2k\pi}{3}, k = 1,2,3 \ldots$$

$$\therefore \mathbf{T = \frac{2\pi}{3}}$$

II) $\text{Sen}(3x+3T) = \text{Sen}3x$

$$\text{Sen}3x\underbrace{\text{Cos}3T}_{\mathbf{1}} + \underbrace{\text{Sen}3T}_{\mathbf{0}}\text{Cos}3x = \text{Sen}3x$$

$$\text{Sen}(3T) = 0$$

$$(3T) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$T = \frac{2k\pi}{3}, k = 1,2,3 \ldots$$

$$\therefore \mathbf{T = \frac{2\pi}{3}}$$

III) $\text{Sen}3x = \text{Sen}(3x + \underbrace{3T}_{\frac{\mathbf{k\pi}}{\mathbf{2}}})$

$$3T = \frac{\pi}{2} \longrightarrow = \text{Cos}3x$$

$$3T = \pi \longrightarrow = -\text{Sen}3x$$

$$3T = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow = -\text{Cos}3x$$

$$3T = 2\pi \longrightarrow = \text{Sen}3x$$

$$\therefore \mathbf{T = \frac{2\pi}{3}}$$

4.1. Cálculo del periodo de funciones trigonométricas:

<table>
<tr><th>Función</th><th>n: Par</th><th>n: Impar</th></tr>
<tr><td>$y = \mathrm{Sen}^n(Bx)$</td><td rowspan="4">$T = \dfrac{\pi}{|B|}$</td><td rowspan="4">$T = \dfrac{2\pi}{|B|}$</td></tr>
<tr><td>$y = \mathrm{Cos}^n(Bx)$</td></tr>
<tr><td>$y = \mathrm{Sec}^n(Bx)$</td></tr>
<tr><td>$y = \mathrm{Csc}^n(Bx)$</td></tr>
<tr><th>Función</th><th colspan="2">n: Par o impar</th></tr>
<tr><td>$y = \mathrm{Tan}^n(Bx)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$T = \dfrac{\pi}{|B|}$</td></tr>
<tr><td>$y = \mathrm{Cot}^n(Bx)$</td></tr>
</table>

- $F(x) = \underbrace{G(x)}_{T_1} + \underbrace{H(x)}_{T_2} + \underbrace{I(x)}_{T_3} + \cdots$

$$T_F = MCM(T_1; T_2; T_3)$$

Ejemplo:

Dadas las funciones: $F(x) = 2\mathrm{Cos}3x + 1; G(x) = 3\mathrm{Sen}^2 2x - 1; H(x) = 5\mathrm{Cos}^4 Kx + 3 \ \ (K > 0)$

Hallar el valor de "K" sabiendo que la suma de los periodos de cada función es $\dfrac{4\pi}{3}$

Resolución:

$$F(x) = 2\mathrm{Cos}3x + 1 \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|3|} \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$G(x) = 3\mathrm{Sen}^2 2x - 1 \longrightarrow T_2 = \frac{\pi}{|2|} \longrightarrow T_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$H(x) = 5\mathrm{Cos}^4 Kx + 3 \longrightarrow T_3 = \frac{\pi}{|K|} \longrightarrow T_3 = \frac{\pi}{K}$$

$$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{K} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{K} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{K} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \mathbf{K = 6}$$

Ejemplo:

Hallar el periodo mínimo de: $F(x) = \text{Tan}\left(\frac{3x}{2}\right) + \text{Cot}\left(\frac{2x}{3}\right)$

Resolución:

$$F(x) = \underbrace{\text{Tan}\left(\frac{3x}{2}\right)}_{T_1} + \underbrace{\text{Cot}\left(\frac{2x}{3}\right)}_{T_2}$$

$$T_1 = \frac{\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$T_2 = \frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} \longrightarrow T_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\mathbf{T_F = MCM(T_1; T_2)}$$

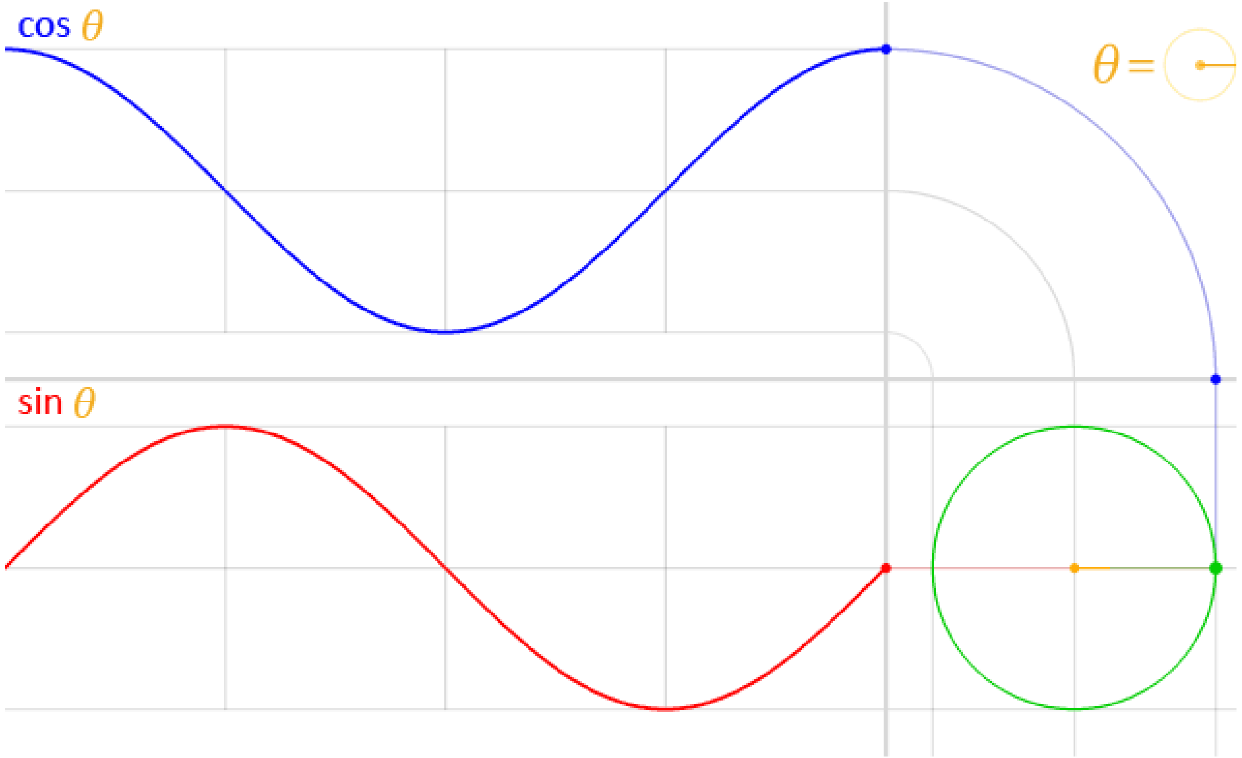
$$T_F = \text{MCM}\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

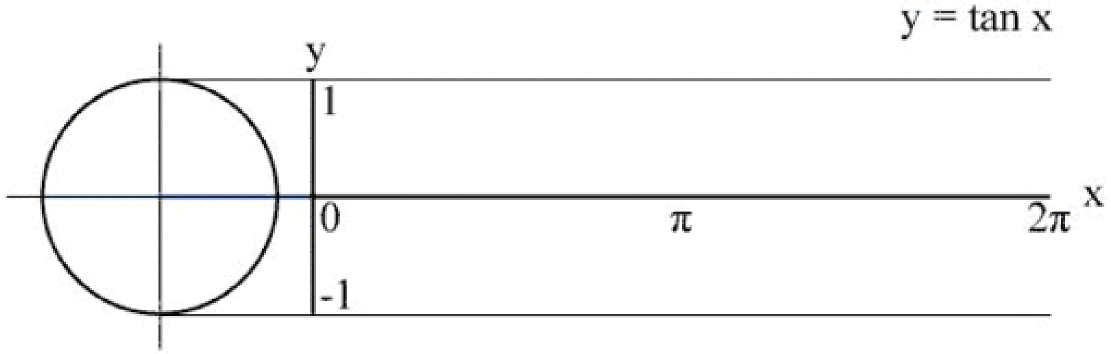
$$T_F = \frac{\text{MCM}(2\pi; 3\pi)}{\text{MCD}(3; 2)}$$

$$T_F = \frac{6\pi}{1}$$

$$\therefore \mathbf{T_F = 6\pi}$$

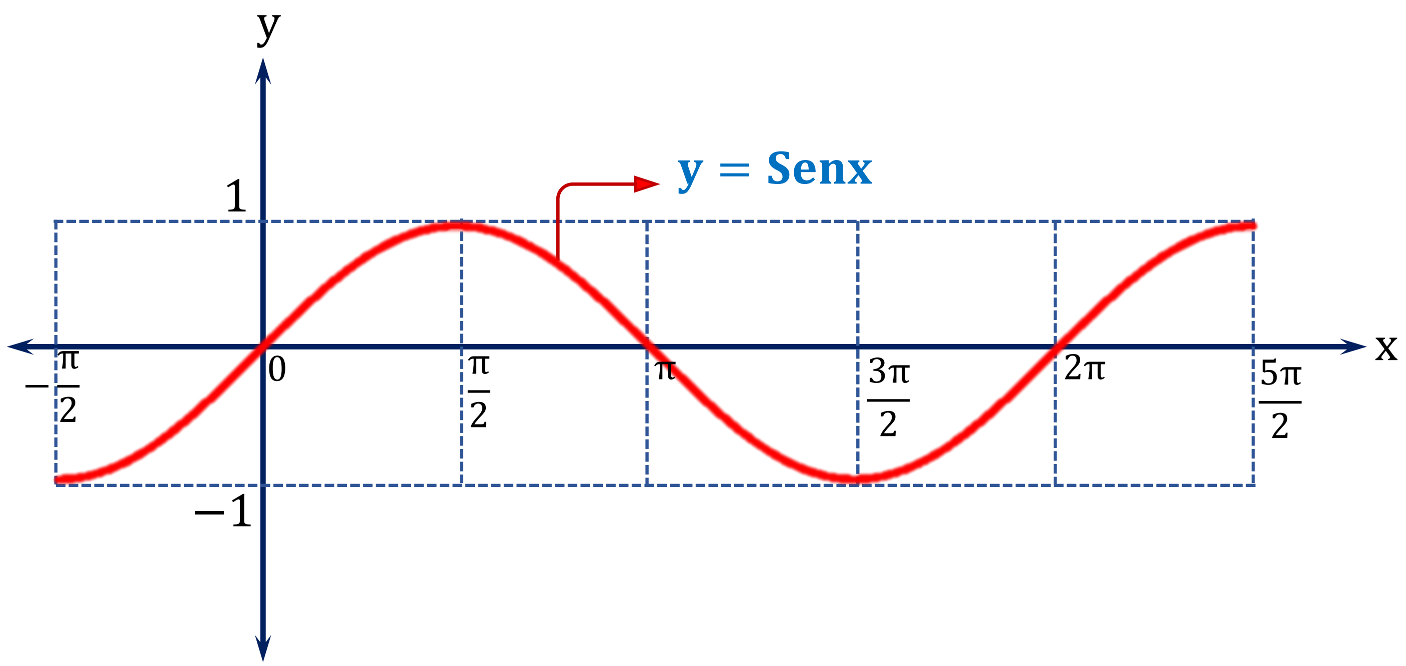
5. Gráfica de funciones:





5.1. Función Seno:

$$FT = \{(x; y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = \mathrm{Sen}(x)\}$$

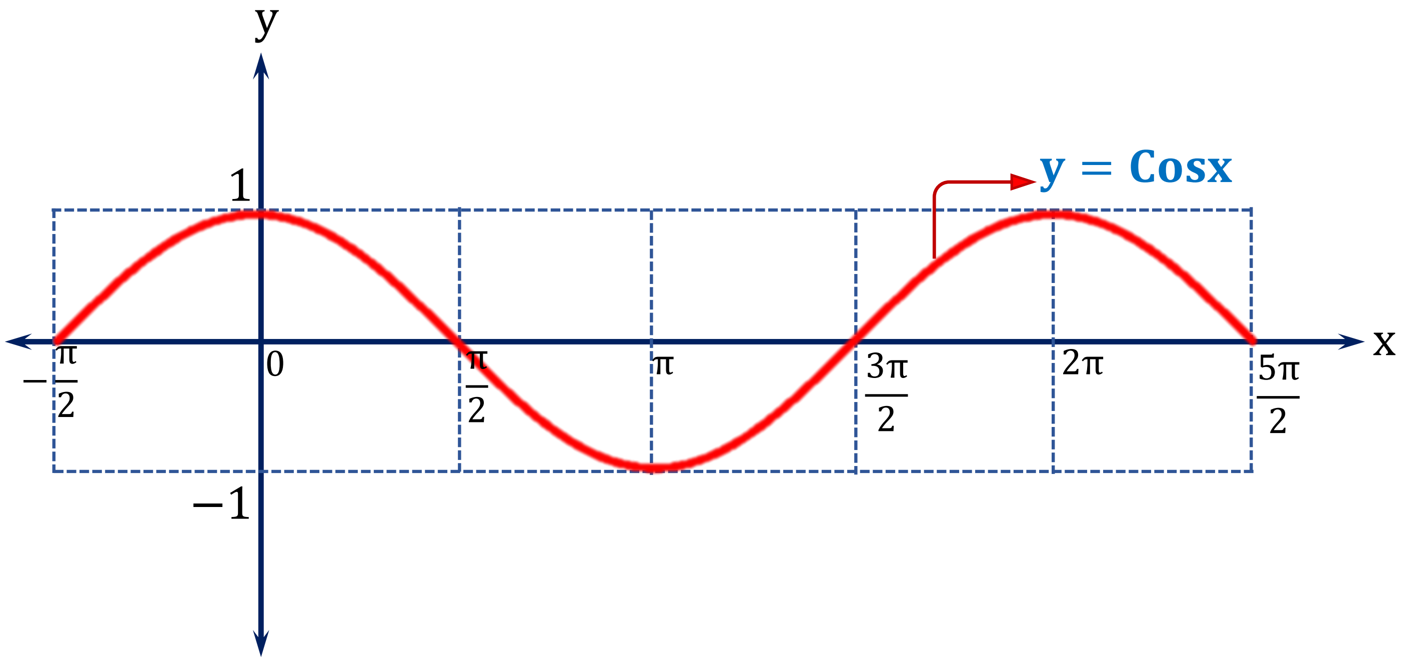


- Dominio: $D_f \in \mathbb{R}$
- Rango: $R_f \in [-1; 1]$
- Periodo: $T = 2\pi$
- Función: Continua
- Función:Creciente y decreciente
- Función: Impar

  $$\mathrm{Sen}(-x) = -\mathrm{Sen}x$$
- Curva: Senoide

5.2. Función Coseno:

$$FT = \{(x; y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = \text{Cos}\,(x)\}$$



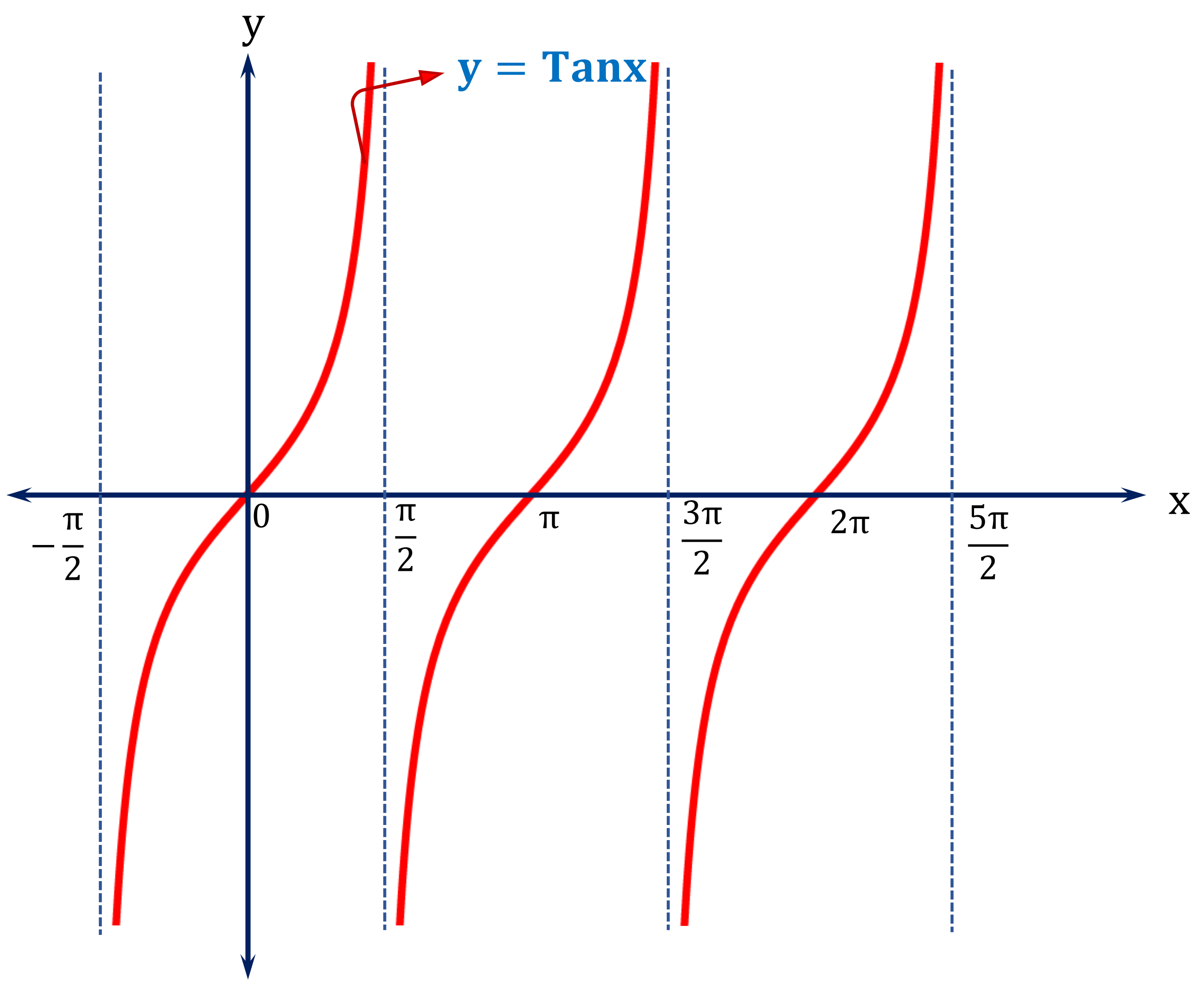
- Dominio: $D_f \in \mathbb{R}$
- Rango: $R_f \in [-1; 1]$
- Periodo: $T = 2\pi$
- Función: Continua
- Función:Creciente y decreciente
- Función: Par

  $$\text{Cos}(-x) = \text{Cosx}$$

- Curva: Cosenoide

5.3. Función Tangente :

$$FT = \left\{(x;y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = \mathrm{Tan}(x); x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$$

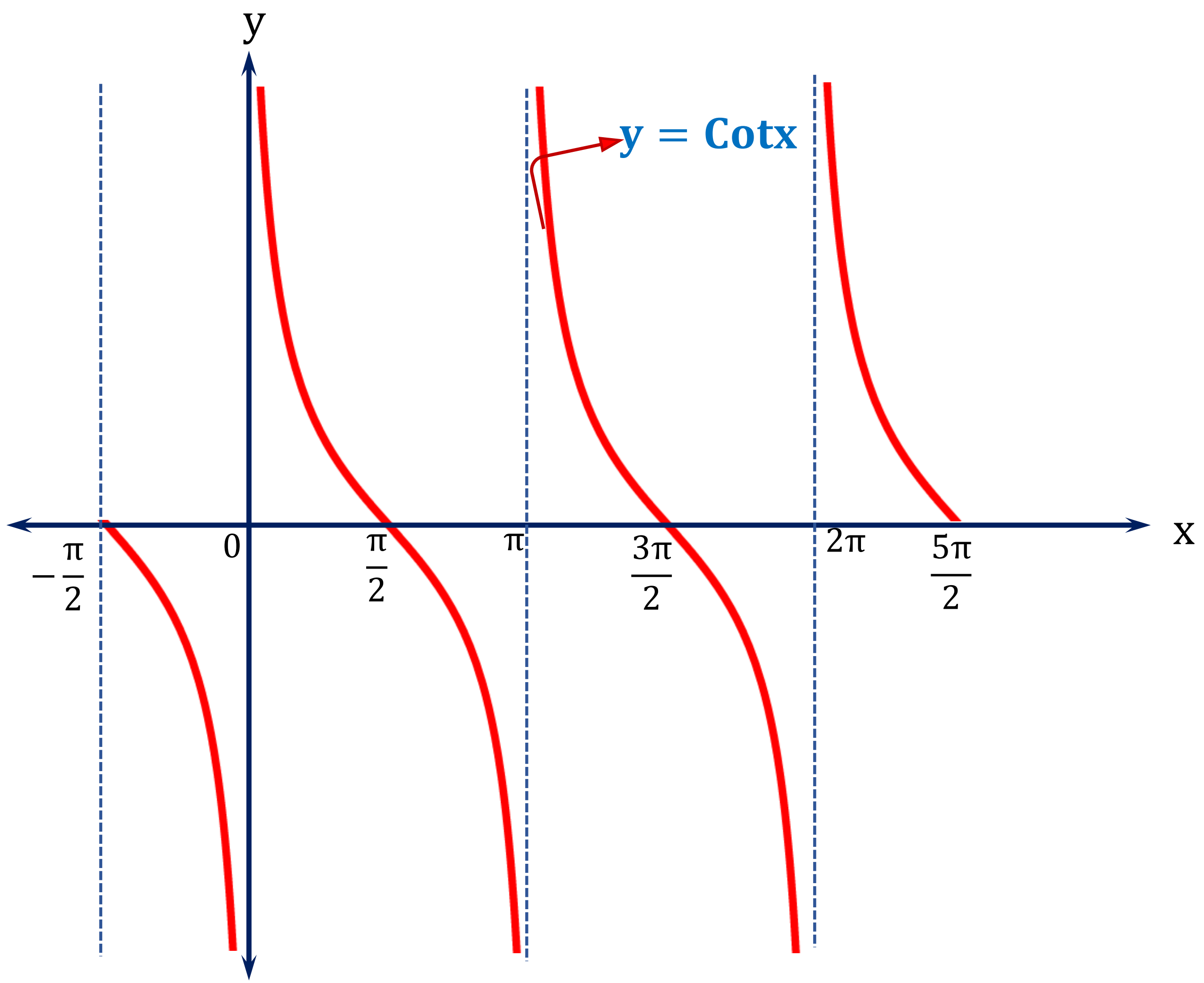


- Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
- Rango: $R_f \in \mathbb{R}$
- Periodo: $T = \pi$
- Función: Discontinua
- Función: Creciente
- Función: Impar

  $\mathrm{Tan}(-x) = -\mathrm{Tan}x$
- Asíntotas: $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- Curva: Tangentoide

5.4. Función Cotangente :

$$FT = \{(x;y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = \mathrm{Cot}(x); x \in \mathbb{R} - \{n\pi \ / \ n \in \mathbb{Z}\}\}$$

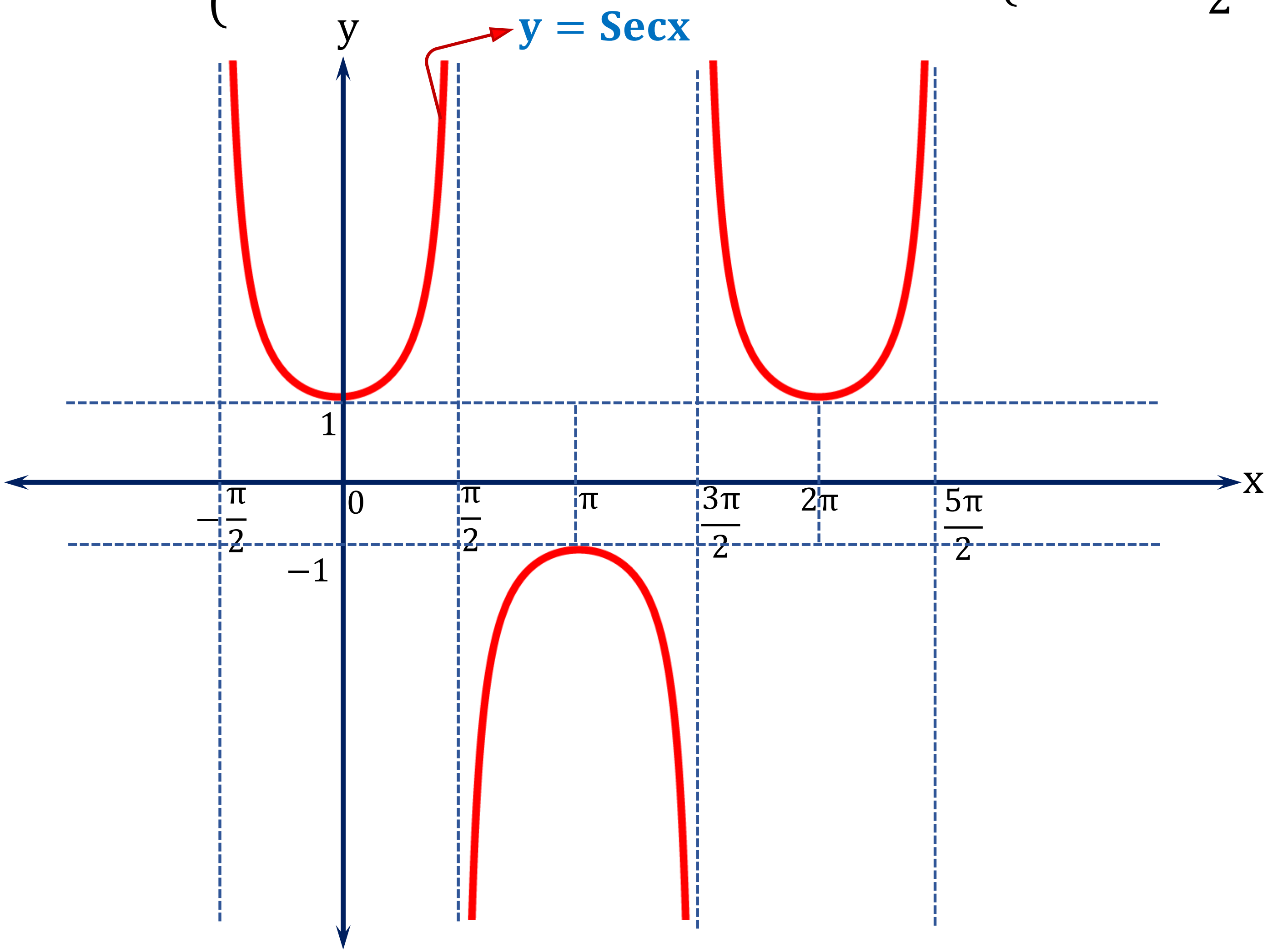


- Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - \{n\pi\}$
- Rango: $R_f \in \mathbb{R}$
- Periodo: $T = \pi$
- Función: Discontinua
- Función: Decreciente
- Función: Impar

  $\mathrm{Cot}(-x) = -\mathrm{Cot}x$
- Asíntotas: $x = n\pi$
- Curva: Cotangentoide

5.5. Función Secante :

$$FT = \left\{(x;y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = \operatorname{Sec}(x); x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$$

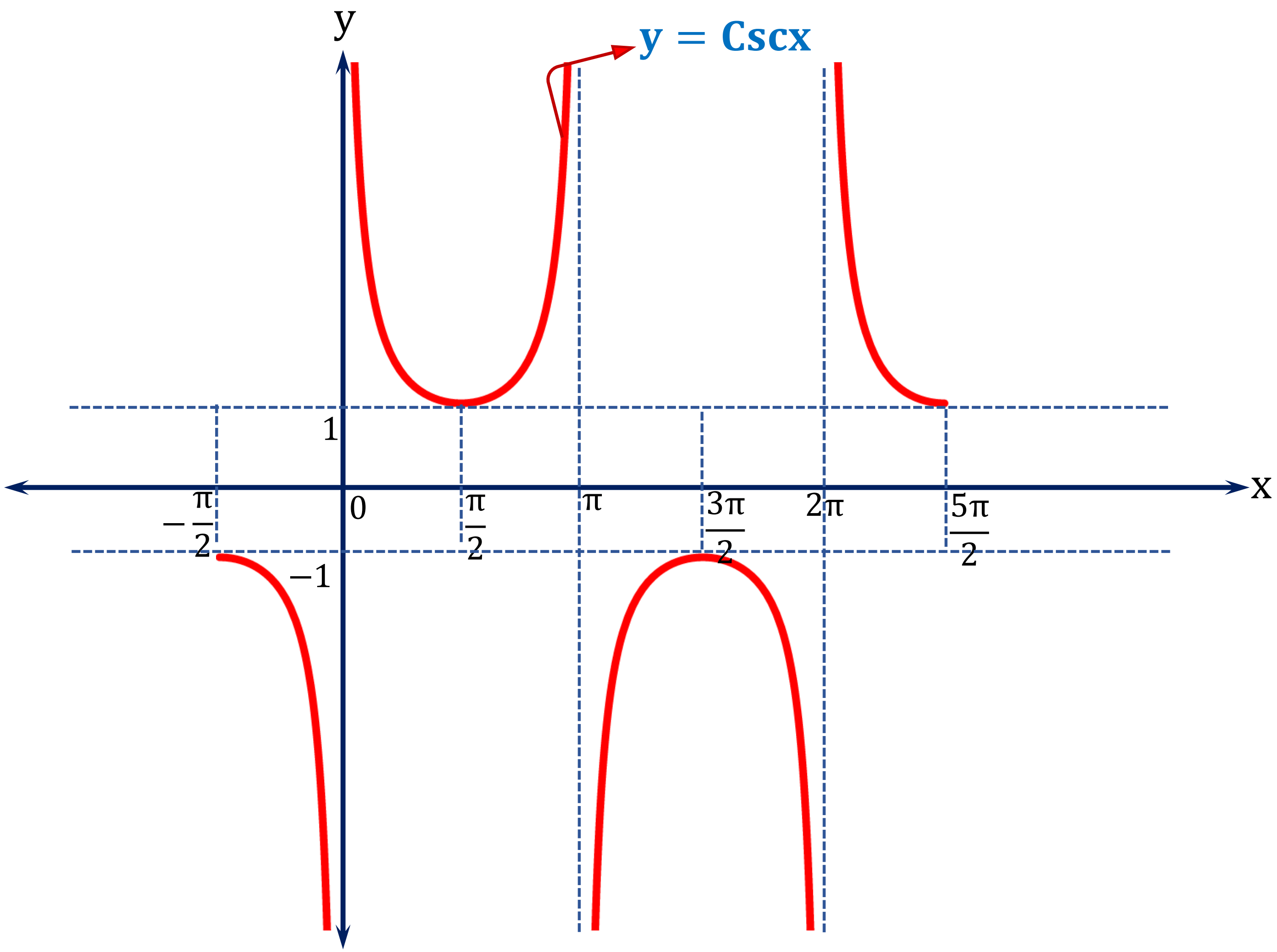


- Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
- Rango: $R_f \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
- Periodo: $T = 2\pi$
- Función: Discontinua
- Función: Creciente y Decreciente
- Función: Par

  $\operatorname{Sec}(-x) = \operatorname{Sec}x$
- Asíntotas: $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- Curva: Secantoide

5.6. Función Cosecante :

$$FT = \{(x;y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R} / y = Csc(x); x \in \mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}\}$$

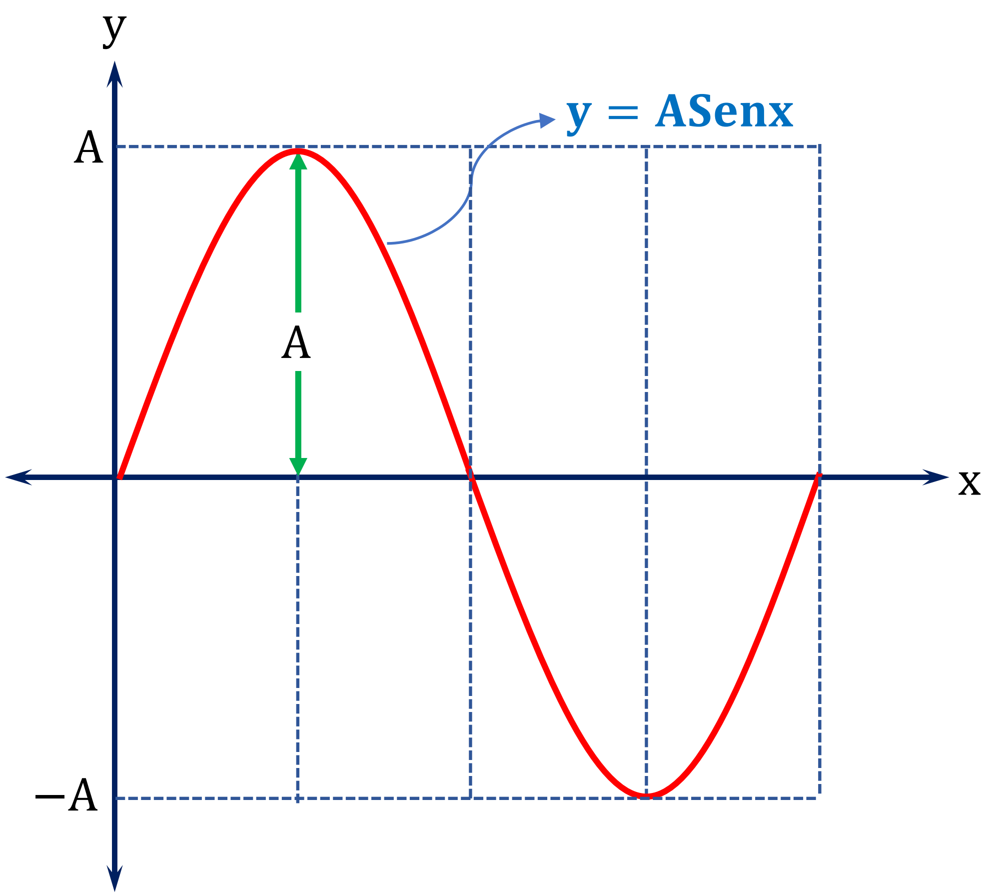


- Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - \{n\pi\}$
- Rango: $R_f \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$
- Periodo: $T = 2\pi$
- Función: Discontinua
- Función: Decreciente y Creciente
- Función: Impar

  $Csc(-x) = Cscx$
- Asíntotas: $x = n\pi$
- Curva: Cosecantoide

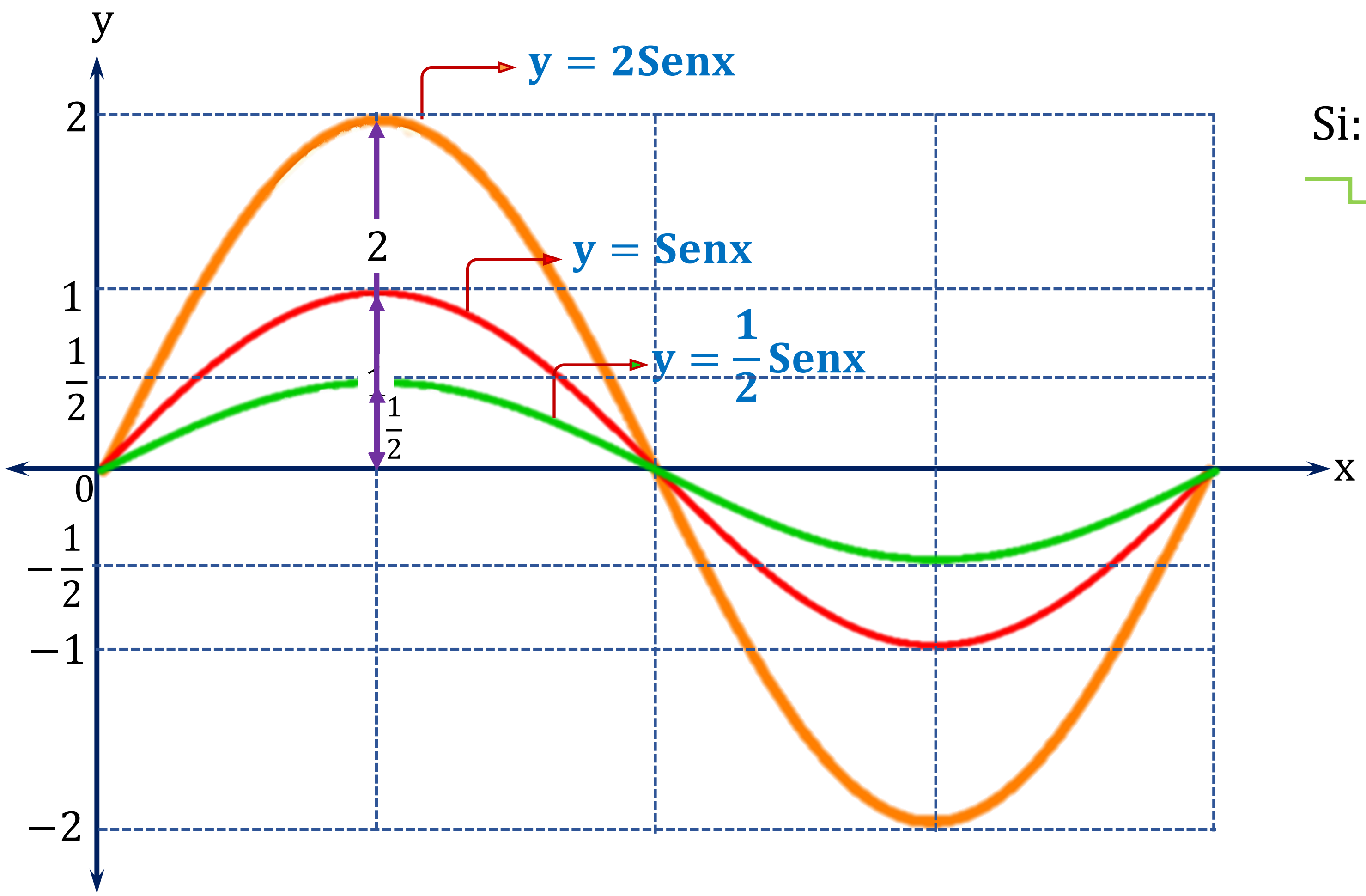
6. Análisis gráfico de las funciones:

6.1. Amplitud(A)



- $F(x) = A.FT(x)$
- Si: $0 < A < 1$
  - La curva se reduce
- Si: $1 < A$
  - La curva se amplia

6.1.1. Amplitud(A)



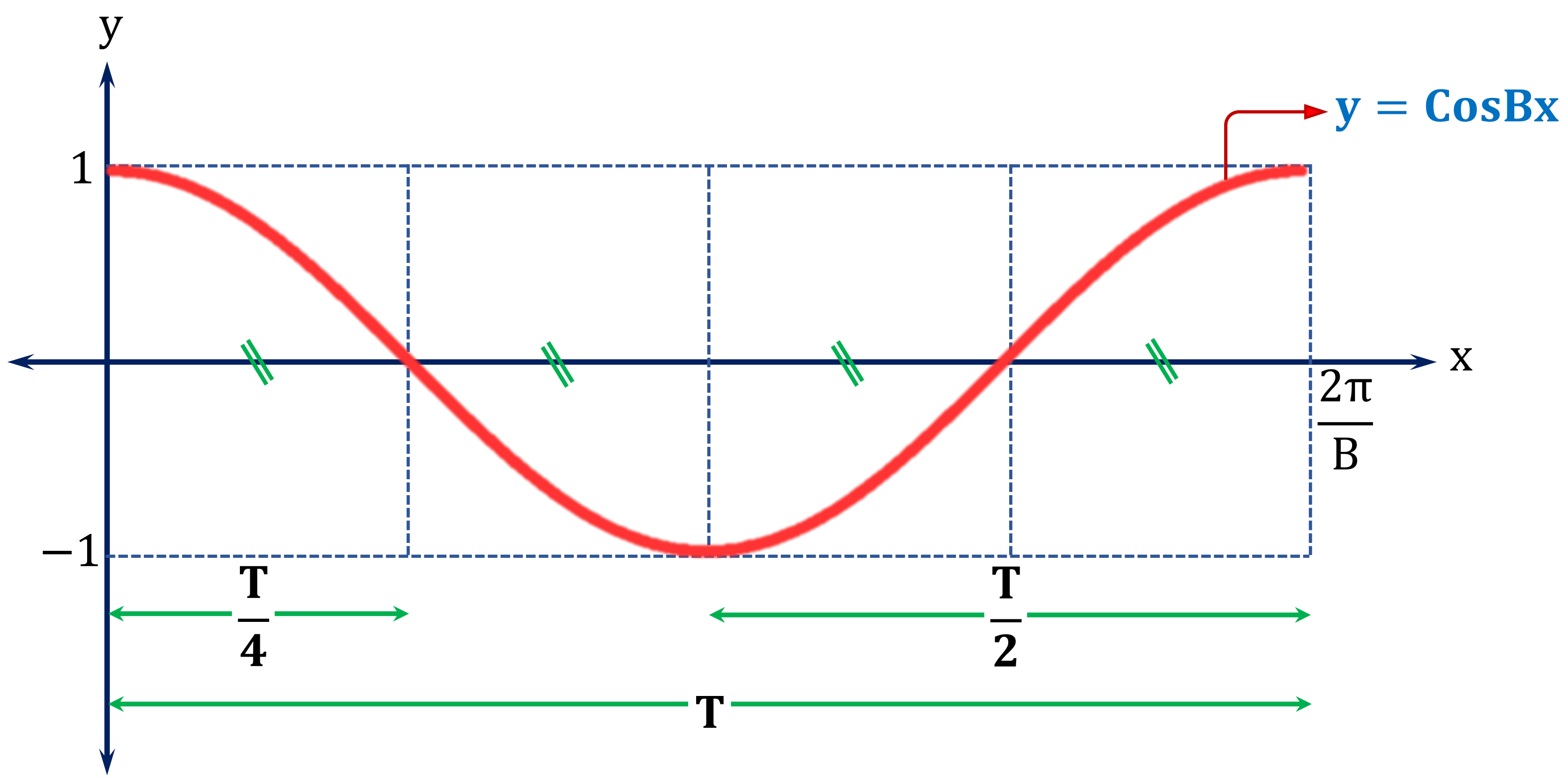
Si: $1 < A$

La curva se amplia

❖ Si: $0 < A < 1$

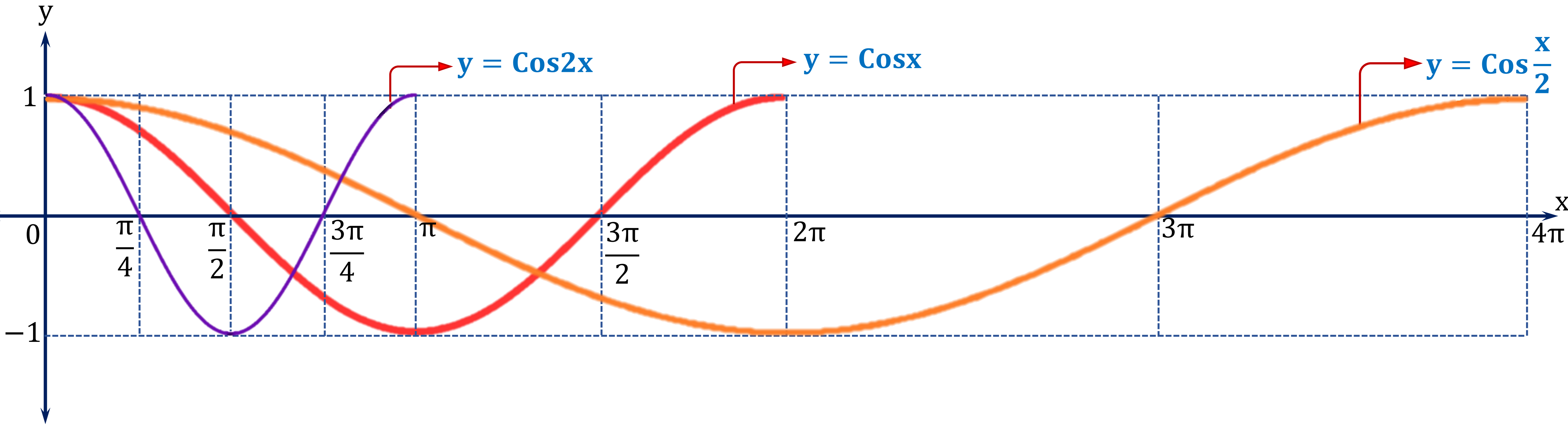
La curva se reduce

6.2. Periodo(B)



- $F(x) = FT(Bx)$
- Si: $0 < B < 1$
  - La curva se elonga
- Si: $1 < B$
  - La curva se comprime

6.2.1. Periodo(B)



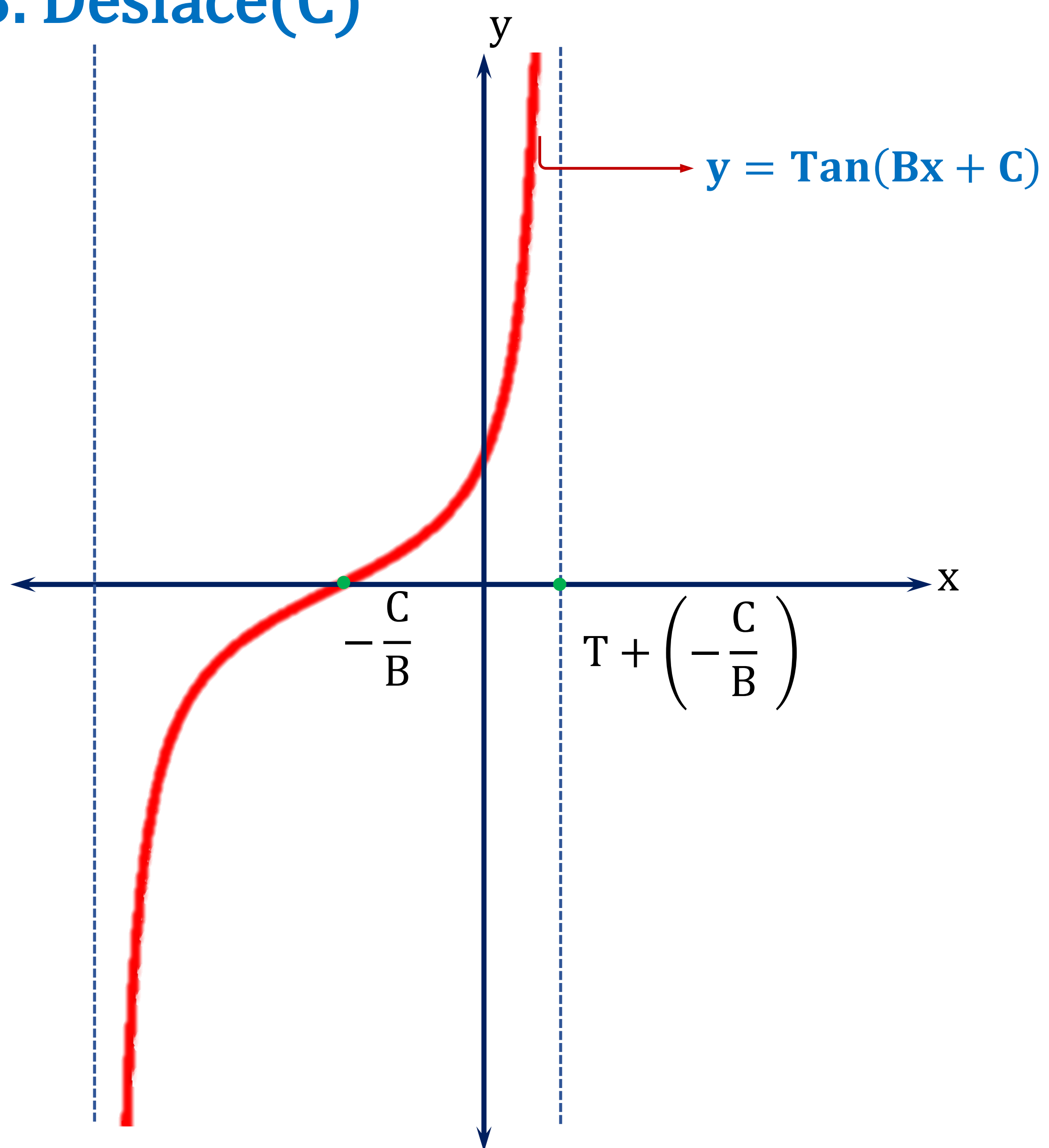
❖ Si: $1 < B$

La curva se comprime

❖ Si: $0 < B < 1$

La curva se elonga

6.3. Desface(C)



- $F(x) = FT\underbrace{(Bx + C)}_{=0}$
- Si: $-\frac{C}{B} > 0$

  La curva se desplaza a la derecha
- Si: $-\frac{C}{B} < 0$

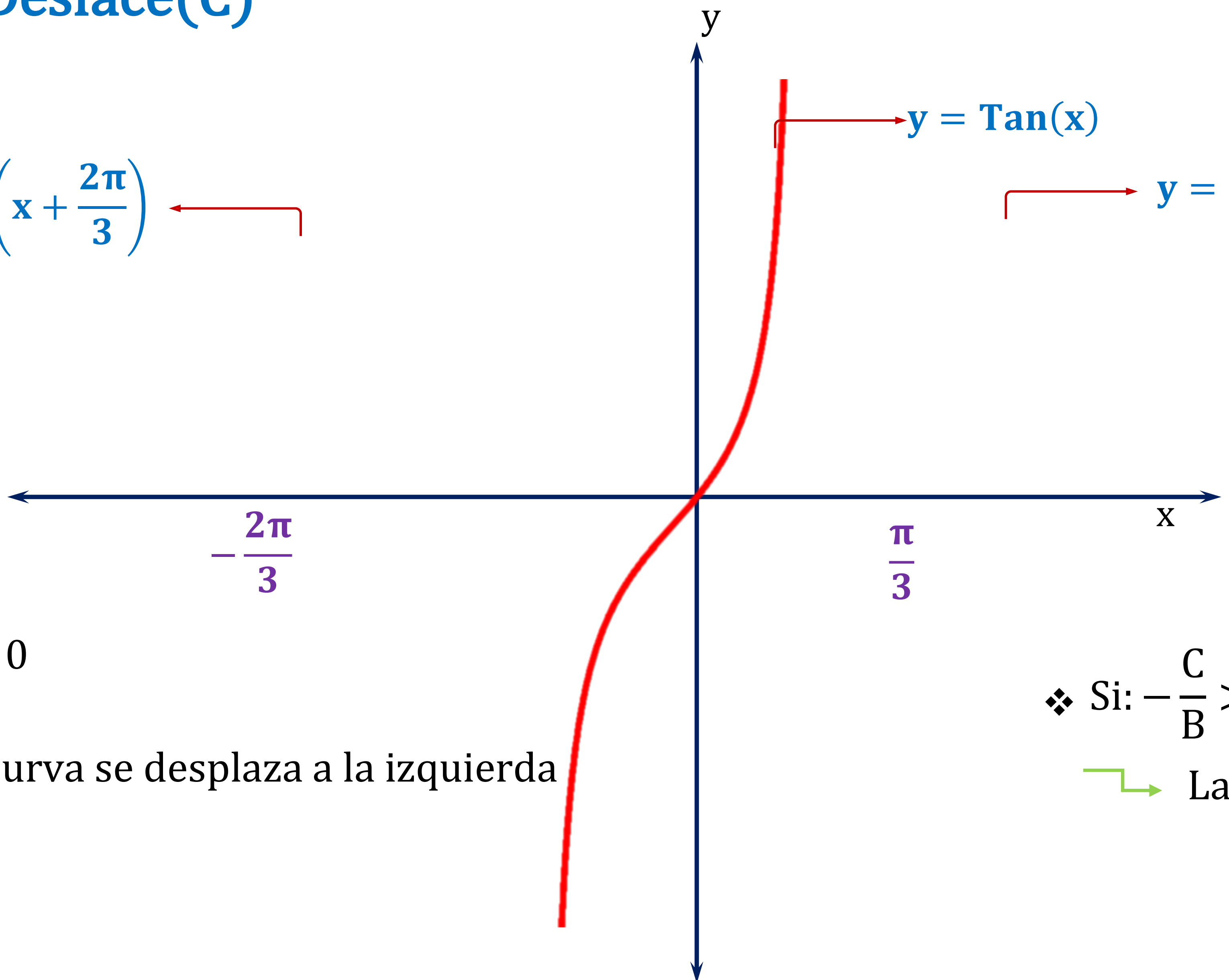
  La curva se desplaza a la izquierda

6. 3.1.Desface(C)

$y = \mathrm{Tan}\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$y = \mathrm{Tan}(x)$

$y = \mathrm{Tan}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$



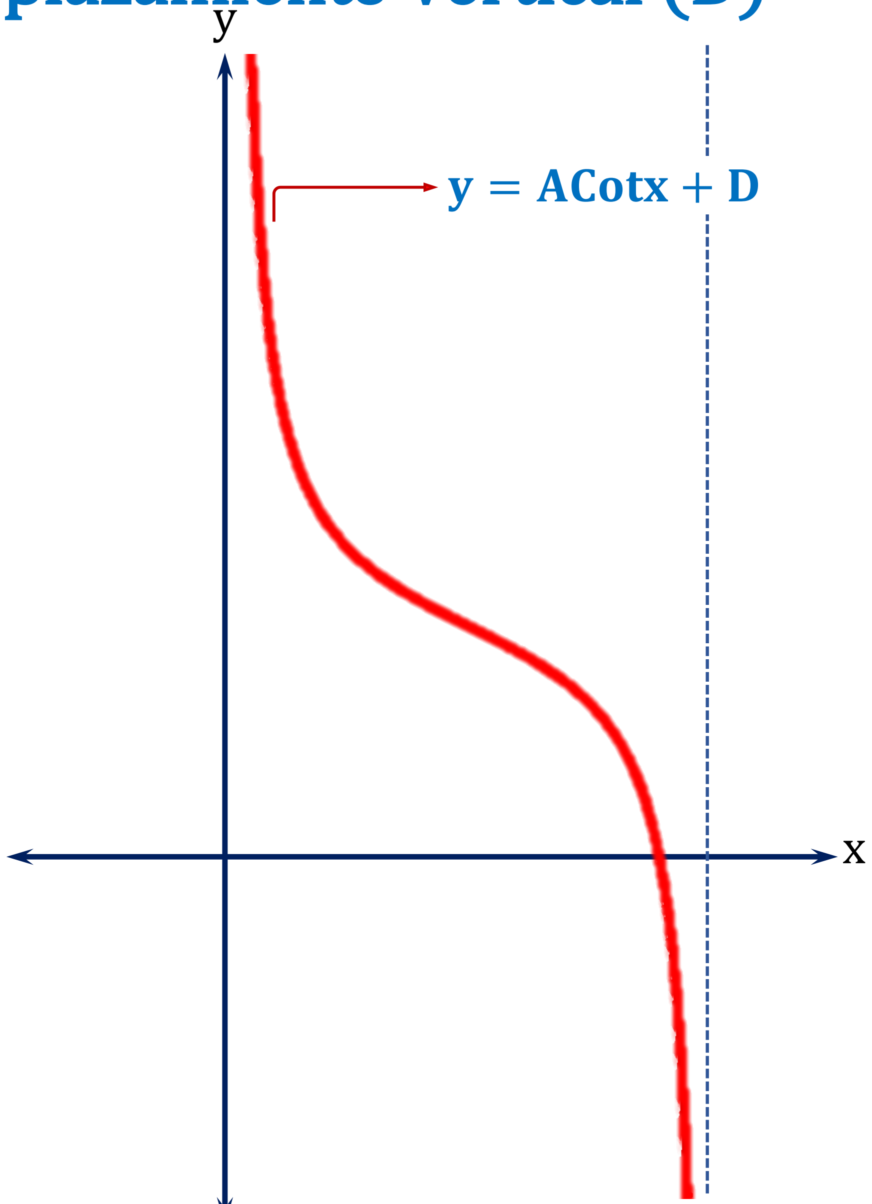
- Si: $-\dfrac{C}{B} < 0$

  La curva se desplaza a la izquierda

- Si: $-\dfrac{C}{B} > 0$

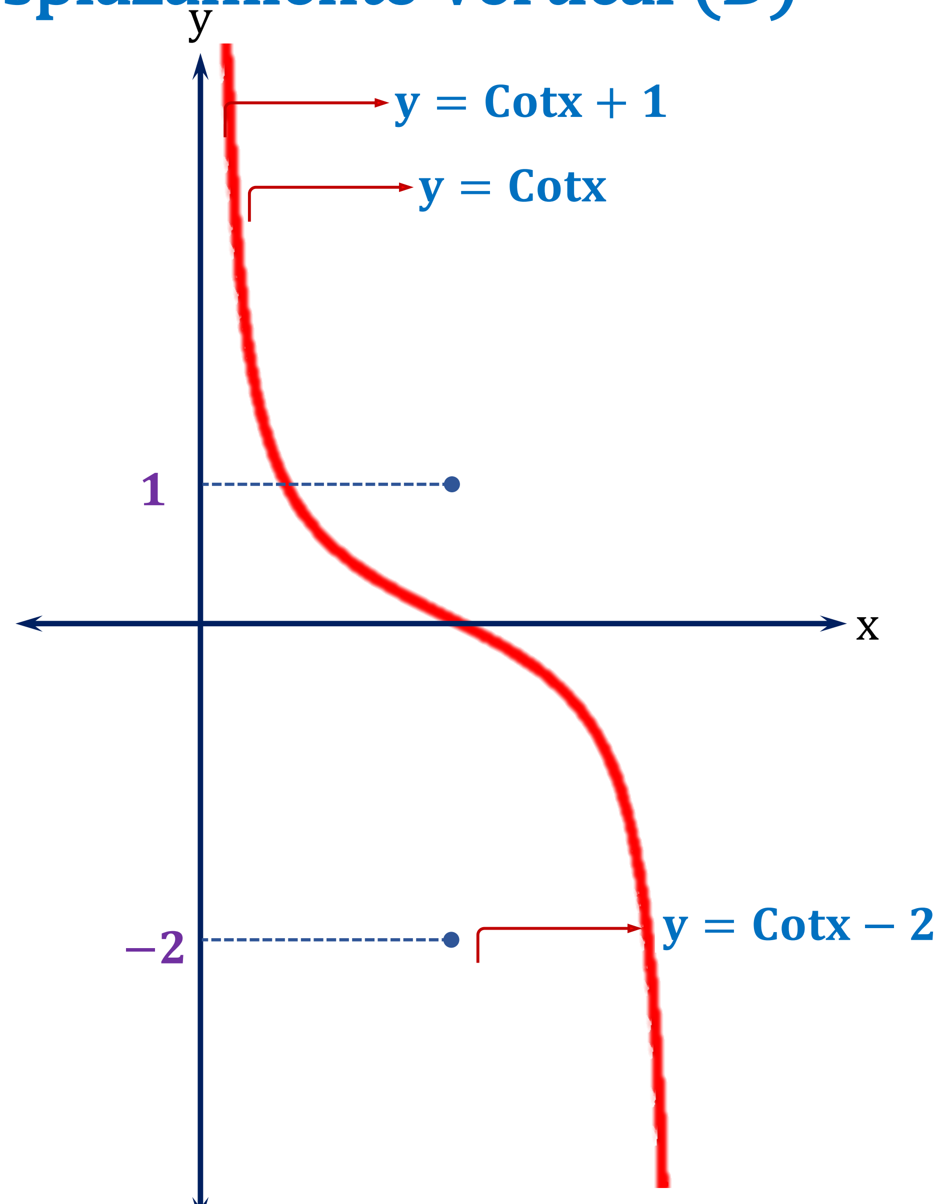
  La curva se desplaza a la derecha

6.4. Desplazamiento Vertical (D)



- $F(x) = A.FT(x) + D$
- Si: $D > 0$
  - La curva se desplaza hacia arriba
- Si: $D < 0$
  - La curva se desplaza hacia abajo

6.4.1. Desplazamiento Vertical (D)



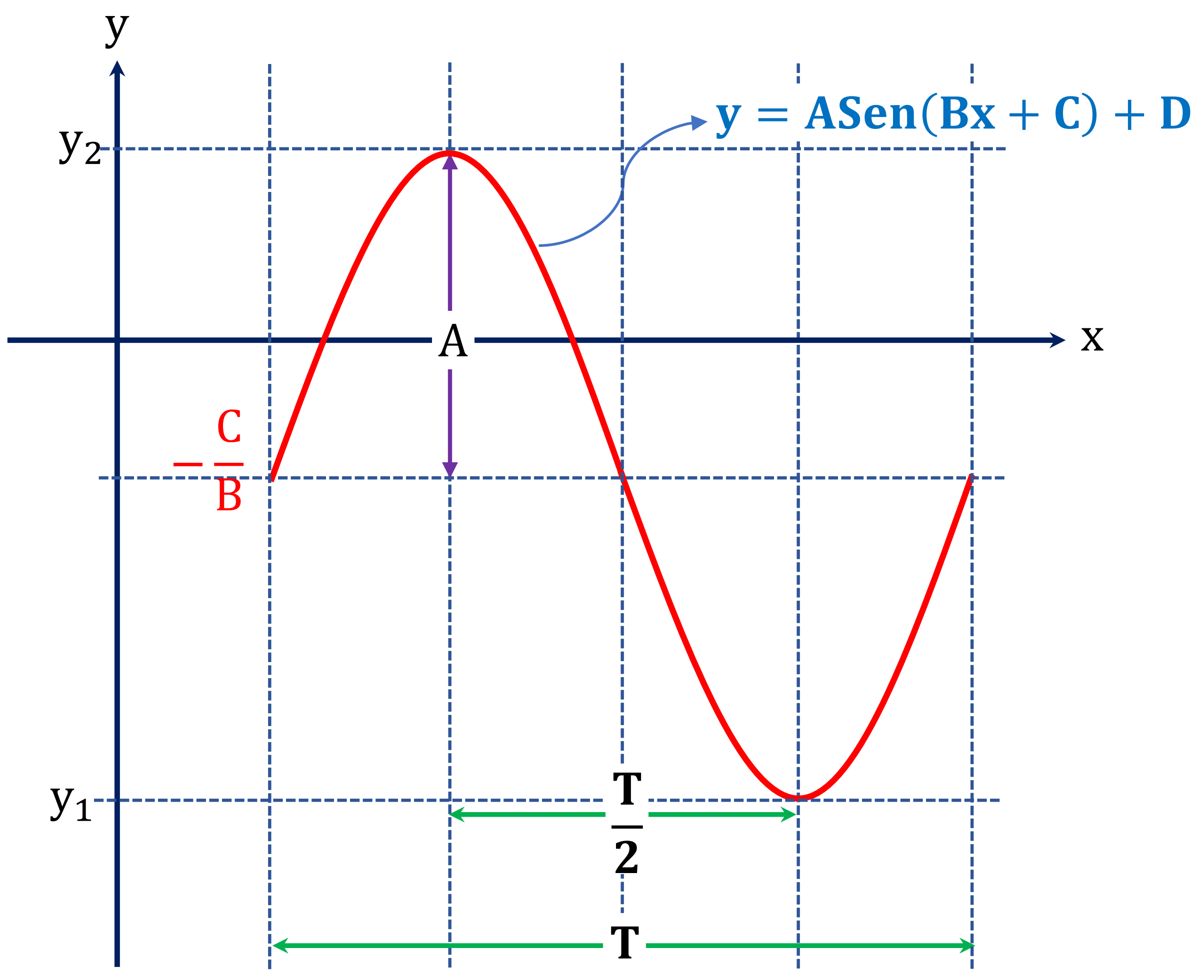
❖ Si: $D > 0$

La curva se desplaza hacia arriba

❖ Si: $D < 0$

La curva se desplaza hacia abajo

7. Gráfica Generalizada :



❖ **Amplitud(A)**

$$A = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

❖ **Periodo(B)**

$$T = \frac{2\pi}{B} \qquad (\mathrm{Sen, Cos, Sec, Csc})$$

$$T = \frac{\pi}{B} \qquad (\mathrm{Tan\ y\ Cot})$$

❖ **Desfase(C)**

$$DH = x = \frac{-C}{B}$$

❖ **Desp. Vertical(D)**

$$D = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

https://www.youtube.com/watch?v=Zq5R_ZwYiCo

1. Sea la función cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \mathrm{Cos}\left|\frac{x}{2}\right| + \mathrm{Csc}x + \mathrm{Cot}x \; ; x \in \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$ Hallar el rango de f.

Resolución:

$$f(x) = \mathrm{Cos}\underbrace{\left|\frac{x}{2}\right|}_{+} + \underbrace{\mathrm{Csc}x + \mathrm{Cot}x} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \mathrm{Cos}\frac{x}{2} + \mathrm{Cot}\frac{x}{2}$$

ANALIZANDO

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$+$$

$$1 < \mathrm{Cot}\left(\frac{x}{2}\right) < \sqrt{3}$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{Cot}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}$$

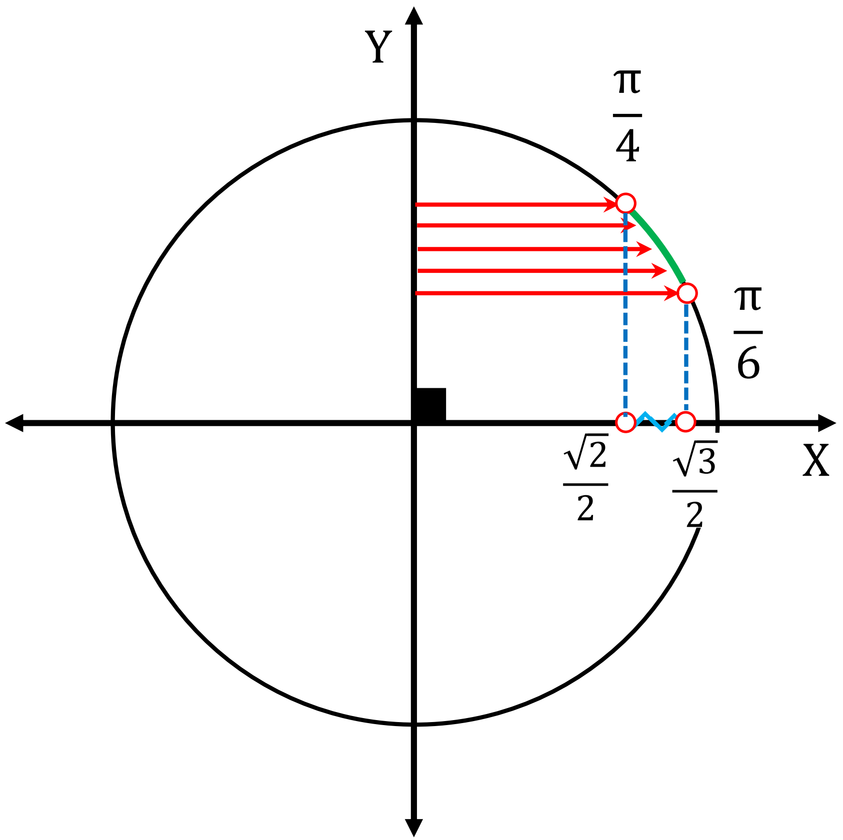
$$\frac{2+\sqrt{2}}{2} < \underbrace{\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{Cot}\left(\frac{x}{2}\right)}_{f(x)} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

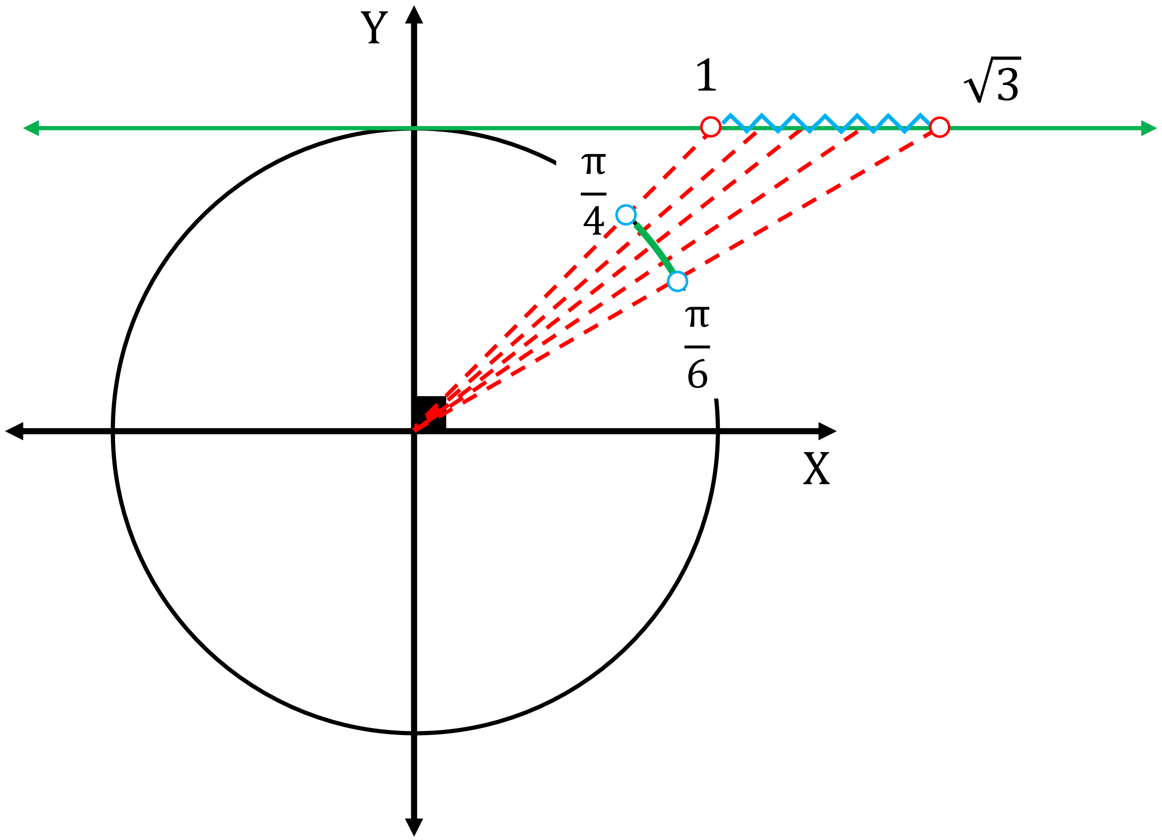
Del análisis en la CT se observa que el Cos y Cot son decrecientes

$$\therefore \mathbf{R_f} \in \left]\frac{\mathbf{2+\sqrt{2}}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right[$$

CLAVE: A

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UNA VARIABLE REAL





$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \mathbf{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 < \mathbf{Cot}\left(\frac{x}{2}\right) < \sqrt{3}$$

AHORA SI!!!

2. Determinar el periodo mínimo de la función f definida por: $f(x) = \left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}\right)\right|$

Resolución:

Si f(x) es periódica, entonces se cumple: $f(x) = f(x+T)$

$$\left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}\right)\right| = \left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x+T}{8}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x+T}{8}\right)\right|$$

$$\left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}\right)\right| = \left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}+\frac{T}{8}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}+\frac{T}{8}\right)\right|$$

$$\left\{\frac{k\pi}{2}; k \neq 0\right\}$$

$$\frac{T}{8} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}\right)\right| = \left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$\therefore \mathbf{T_{mín} = 4\pi}$$

$$\underbrace{\left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}\right)\right| + \underbrace{\left|\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}\right)\right| = \left|-\mathrm{Csc}\left(\frac{x}{8}\right)\right|} + \left|\mathrm{Sec}\left(\frac{x}{8}\right)\right|}_{=}$$

CLAVE: D

3. Hallar el dominio de la función f definida por: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-(\mathrm{Sen}x + \mathrm{Csc}x)}}$ Si $D_f \subset [0; 2\pi]$

Resolución:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-(\mathrm{Sen}x + \mathrm{Csc}x)}}$$

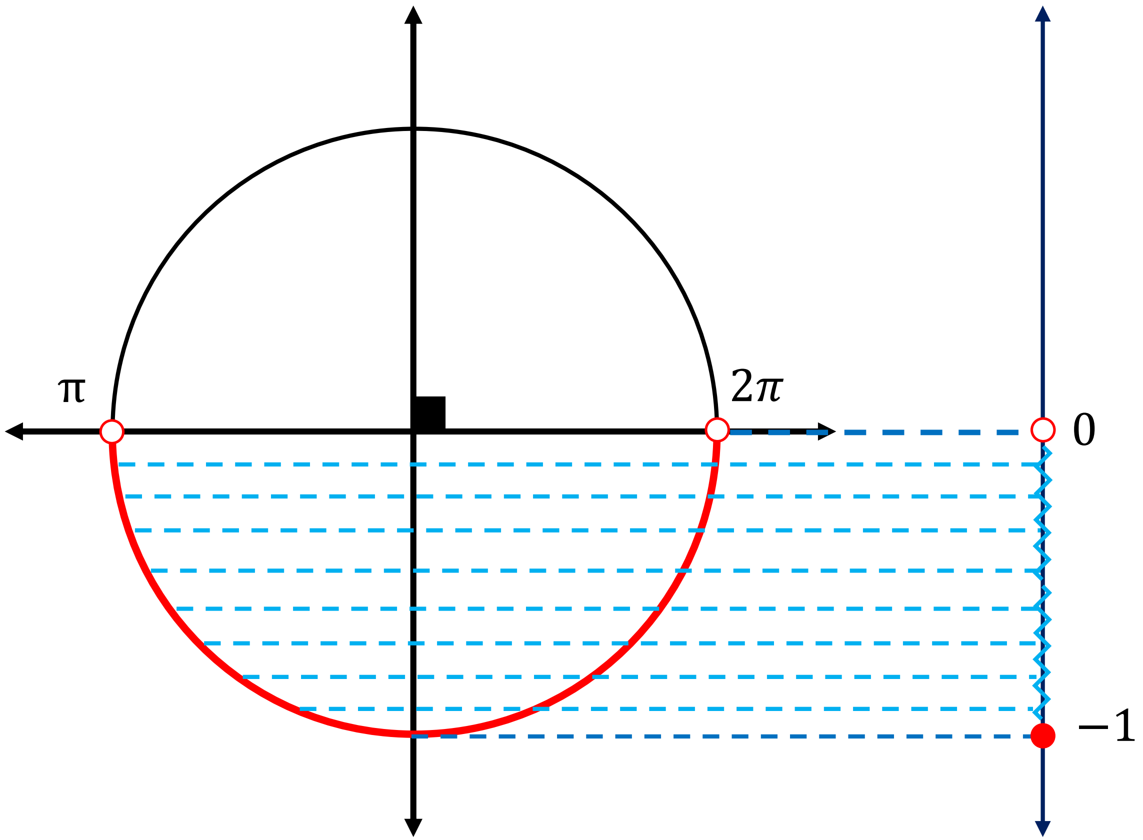
$> \mathbf{0}$

$$-(\mathrm{Sen}x + \mathrm{Csc}x) > 0$$

$$\mathrm{Sen}x + \mathrm{Csc}x < 0$$

$$\underbrace{\mathrm{Sen}x}_{-} + \frac{1}{\underbrace{\mathrm{Sen}x}_{\neq 0}} < 0$$

$\therefore \mathbf{D_f \in\,]\pi; 2\pi[}$



$\mathbf{\pi < x < 2\pi}$

CLAVE: D

4. Halle el rango de la función f definida por: $f(x) = |\text{Senx}|\text{Cscx} + |\text{Cscx}|\text{Senx}$

Resolución:

$$f(x) = \underbrace{|\text{Senx}|}_{\pm} \times \frac{1}{\text{Senx}} + \left|\frac{1}{\underbrace{\text{Senx}}_{\neq 0}}\right| \times \text{Senx}$$

$$\text{Si: Senx} > 0 \longrightarrow \quad f(x) = \cancel{\text{Senx}}\frac{1}{\cancel{\text{Senx}}} + \frac{1}{\cancel{\text{Senx}}}\cancel{\text{Senx}}$$

$$f(x) = y = 2$$

$$\text{Si: Senx} < 0 \longrightarrow \quad f(x) = -\cancel{\text{Senx}}\frac{1}{\cancel{\text{Senx}}} + \frac{-1}{\cancel{\text{Senx}}}\cancel{\text{Senx}}$$

$$f(x) = y = -2$$

$\therefore \mathbf{R_f = \{-2; 2\}}$

CLAVE: A

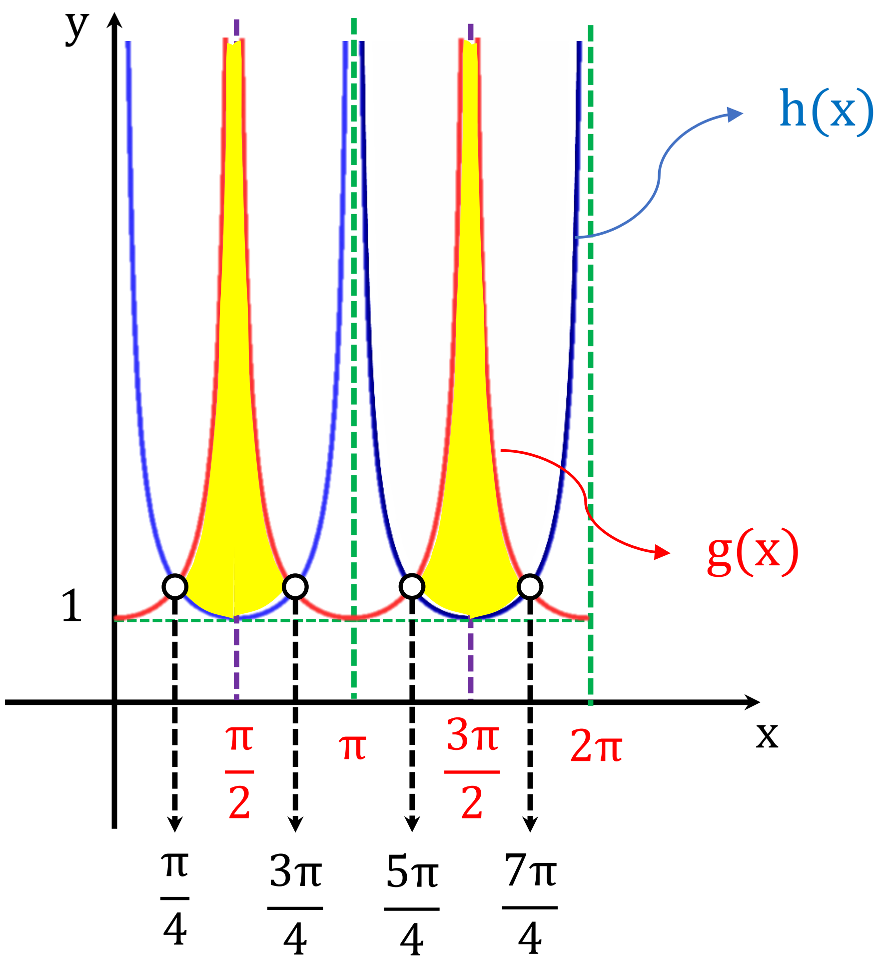
5. Sea la función f tal que: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|Secx| - |Cscx|}}$ Si $D_f \subset \,]0; 2\pi[$, entonces D_f es:

Resolución:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{|Secx| - |Cscx|}_{> 0}}}$$

$$|Secx| - |Cscx| > 0$$

$$\underbrace{|Secx|}_{g(x)} > \underbrace{|Cscx|}_{h(x)}$$



$$\therefore\ \mathbf{D_f} \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right[- \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$$

CLAVE: D

6. Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de cada proposición, si la función f está definida por:

$$f(x) = 7Csc[\pi x + 1], x \in \mathbb{R}$$

(**F**) $f_{máx} = 7$

(**V**) Su periodo mínimo es 2

(**V**) Las asíntotas tienen por ecuación $x = k - \frac{1}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$$f(x) = 7Csc[\pi x + 1]$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\pi x \in \mathbb{R}$$

$$\pi x + 1 \in \mathbb{R} \qquad \pi x + 1 \neq k\pi$$

$$\pi x \neq k\pi - 1$$

$$x \neq k - \frac{1}{\pi}$$

$$Csc(\pi x + 1) \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq Csc(\pi x + 1)$$

$$7Csc(\pi x + 1) \leq -7 \quad \vee \quad 7 \leq 7Csc(\pi x + 1)$$

$$\therefore \mathbf{R_f} \in]-\infty; -7] \cup [7; \infty +[$$

$Máximo_{relativo}$ ← -7; 7 → $Mínimo_{relativo}$

$$T = \frac{2\pi}{|B|} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{|\pi|} \longrightarrow \mathbf{T = 2}$$

$$L_{Asíntotas} = \text{Puntos de discontinuidad}$$

$$\mathbf{L_A \neq k - \frac{1}{\pi}}$$

CLAVE: B

7. Halle una constante T ,$T > 0$, tal que $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, donde f es una función definida por:

$$f(x) = 2 + \text{Cos}2x - \left(\frac{1}{\text{SecxCscx}}\right)^2$$

Resolución:

Si f(x) es periódica, entonces se cumple: $$f(x) = f(x + T)$$

$$2 + \text{Cos}2x - \left(\frac{1}{\text{SecxCscx}}\right)^2 = 2 + \text{Cos}(2x + 2T) - \left(\frac{1}{\text{Sec}(x + T)\text{Csc}(x + T)}\right)^2$$

$$T = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \quad = 2 + \text{Cos}(2x + 2\frac{\pi}{2}) - \left(\frac{1}{\text{Sec}(x + \frac{\pi}{2})\text{Csc}(x + \frac{\pi}{2})}\right)^2$$

$$= 2 - \text{Cos}(2x) - \left(\frac{1}{-\text{Csc}(x)\text{Sec}(x)}\right)^2$$

$$T = \pi \longrightarrow \quad = 2 + \text{Cos}(2x + 2\pi) - \left(\frac{1}{\text{Sec}(x + \pi)\text{Csc}(x + \pi)}\right)^2$$

$$= 2 + \text{Cos}(2x) - \left(\frac{1}{-(\text{Secx})\,(-\text{Cscx})}\right)^2$$

CLAVE: C

8.Halle el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f, cuya regla de correspondencia es: $F(x)=\dfrac{\text{Vers}(2\pi x)}{\text{Cov}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Resolución:

$$F(x)=\frac{\text{Vers}(2\pi x)}{\text{Cov}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$F(x)=\frac{1-\text{Cos}(2\pi x)}{\underbrace{1-\text{Sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}_{\mathbf{=0}}}$$

$$1-\text{Sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$$

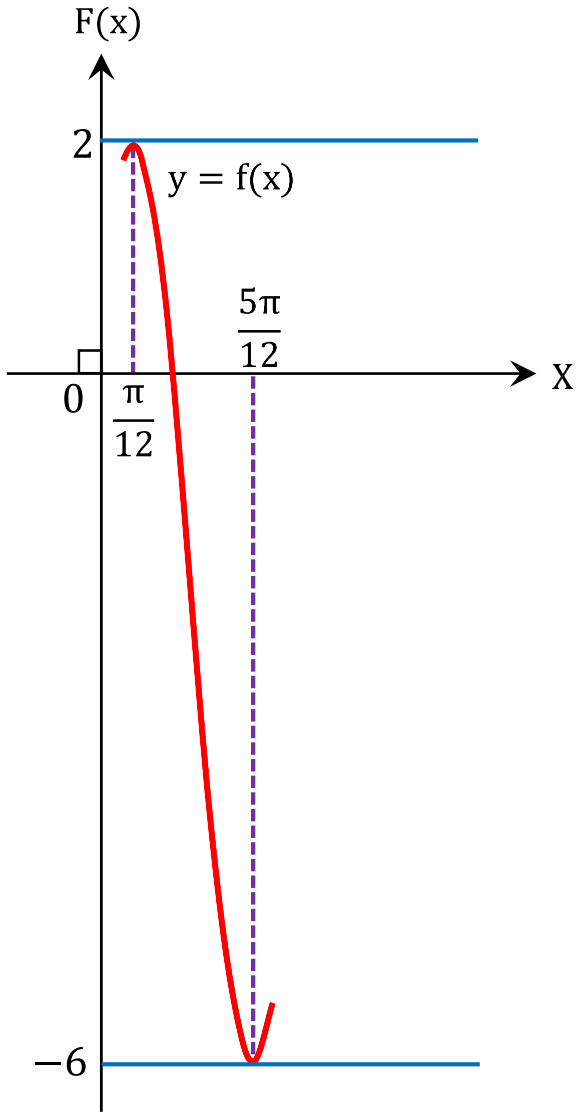
$$\text{Sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1$$

$$\frac{\pi x}{2}=\frac{(4k+1)\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ \mathbf{x}=\{\mathbf{4k+1}\ \ /\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}\}$$

CLAVE: C

9. Hallar la ecuación de la sinusoide mostrada:



Resolución: $f(x) = ASen(Bx + C) + D$

$$A = \frac{2-(-6)}{2} \longrightarrow A = 4$$

$$\frac{T}{2} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \longrightarrow \frac{T}{2} = \frac{4\pi}{12} \longrightarrow \frac{\pi}{B} = \frac{\pi}{3} \longrightarrow B = 3$$

$$-\frac{C}{B} = \frac{\pi}{12} - \frac{T}{4} \longrightarrow -\frac{C}{B} = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \longrightarrow -C = 3\left(-\frac{\pi}{12}\right) \longrightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

$$D = \frac{2+(-6)}{2} \longrightarrow D = -2$$

$$\therefore \mathbf{F(x) = 4Sen\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 2}$$

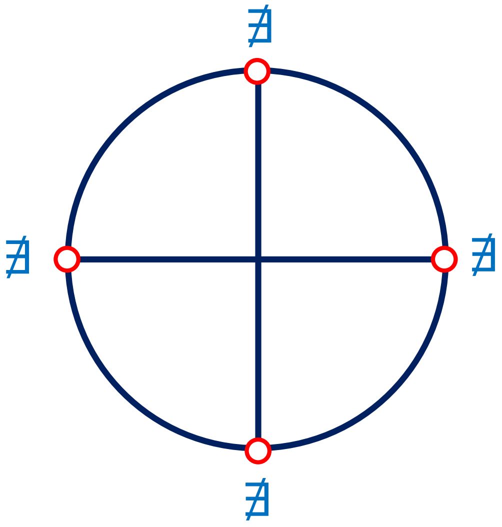
CLAVE: A

10. Halle el dominio de la función f definida por: $F(x) = \dfrac{1+|\text{Tanx}|}{1-|\text{Cotx}|}$

Resolución:

$$F(x) = \dfrac{1+|\text{Tanx}|}{1-|\text{Cotx}|} \rightarrow \neq 0$$

Para que la función esté definida la Tanx y Cotx deben estar determinadas.

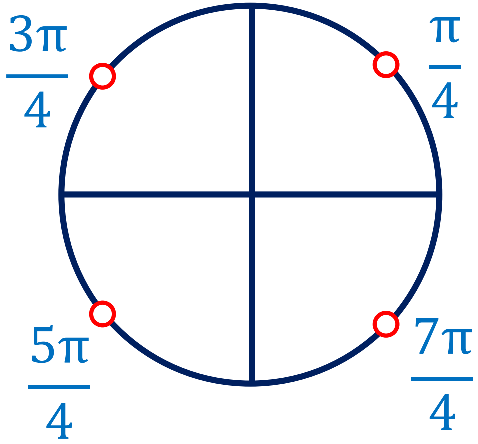


$$x \neq \frac{k\pi}{2}$$

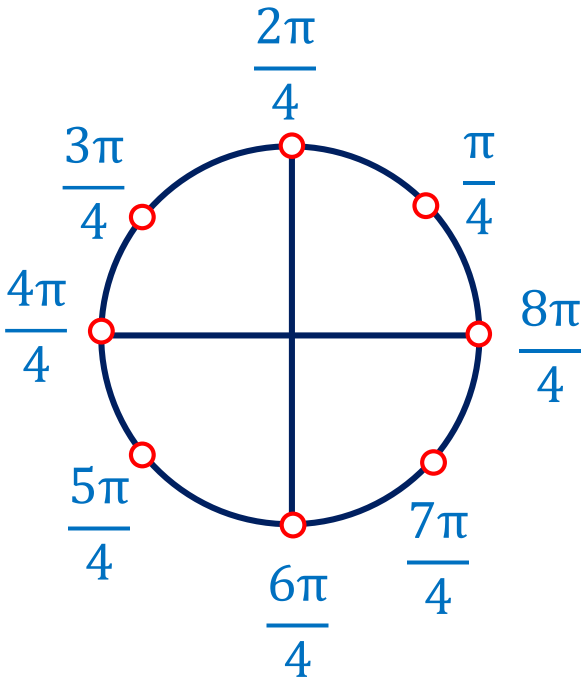
$$1-|\text{Cotx}| \neq 0$$

$$|\text{Cotx}| \neq 1$$

$$|\text{Cotx}| \neq \pm 1$$



$$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}$$



$$x \neq \frac{k\pi}{4}$$

$$\therefore D_f \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{4} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

CLAVE: C

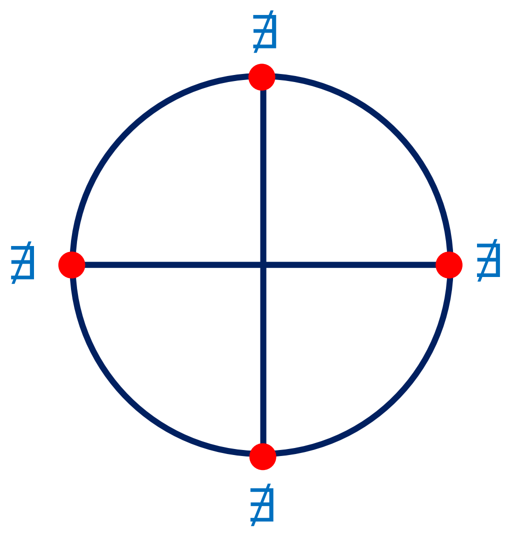
11. Determine los puntos de discontinuidad de la función f definida por: $f(x) = \dfrac{\text{Tanx} + \text{Cotx}}{|\text{Senx}| - |\text{Cosx}|}$

Resolución:

$$f(x) = \frac{\text{Tanx} + \text{Cotx}}{|\text{Senx}| - |\text{Cosx}|}$$

Los puntos de discontinuidad son las asíntotas de la gráfica o el complemento del dominio; es decir los lugares donde la función no está determinada.

$$\text{Tanx} \wedge \text{Cotx}$$



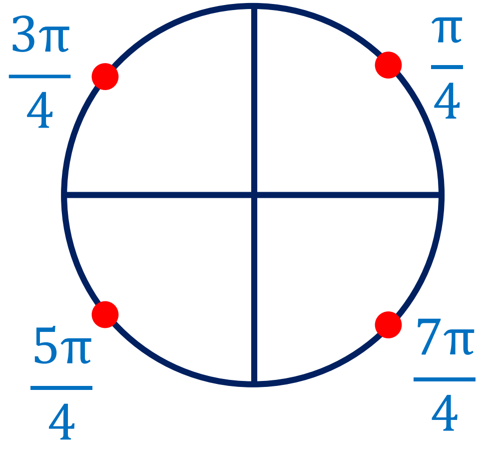
$$\mathbf{x = \frac{k\pi}{2}}$$

$$|\text{Senx}| - |\text{Cosx}| = 0$$

$$|\text{Senx}| = |\text{Cosx}|$$

$$|\text{Tanx}| = 1$$

$$|\text{Tanx}| = \pm 1$$



$$\mathbf{x = \frac{(2k+1)\pi}{4}}$$

$$\mathbf{x = \frac{k\pi}{4}}$$

$$\therefore \mathbf{x = \left\{\frac{k\pi}{4} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

CLAVE: C

12. Determine el periodo de la función definida por: $f(x) = \dfrac{\text{Senx}}{\sqrt{1+\text{Tan}^2x}} + \dfrac{\text{Cosx}}{\sqrt{1+\text{Cot}^2x}}$

Resolución:

$$f(x) = \frac{\text{Senx}}{\sqrt{\text{Sec}^2x}} + \frac{\text{Cosx}}{\sqrt{\text{Csc}^2x}}$$

$$f(x) = \frac{\text{Senx}}{|\text{Secx}|} + \frac{\text{Cosx}}{|\text{Cscx}|}$$

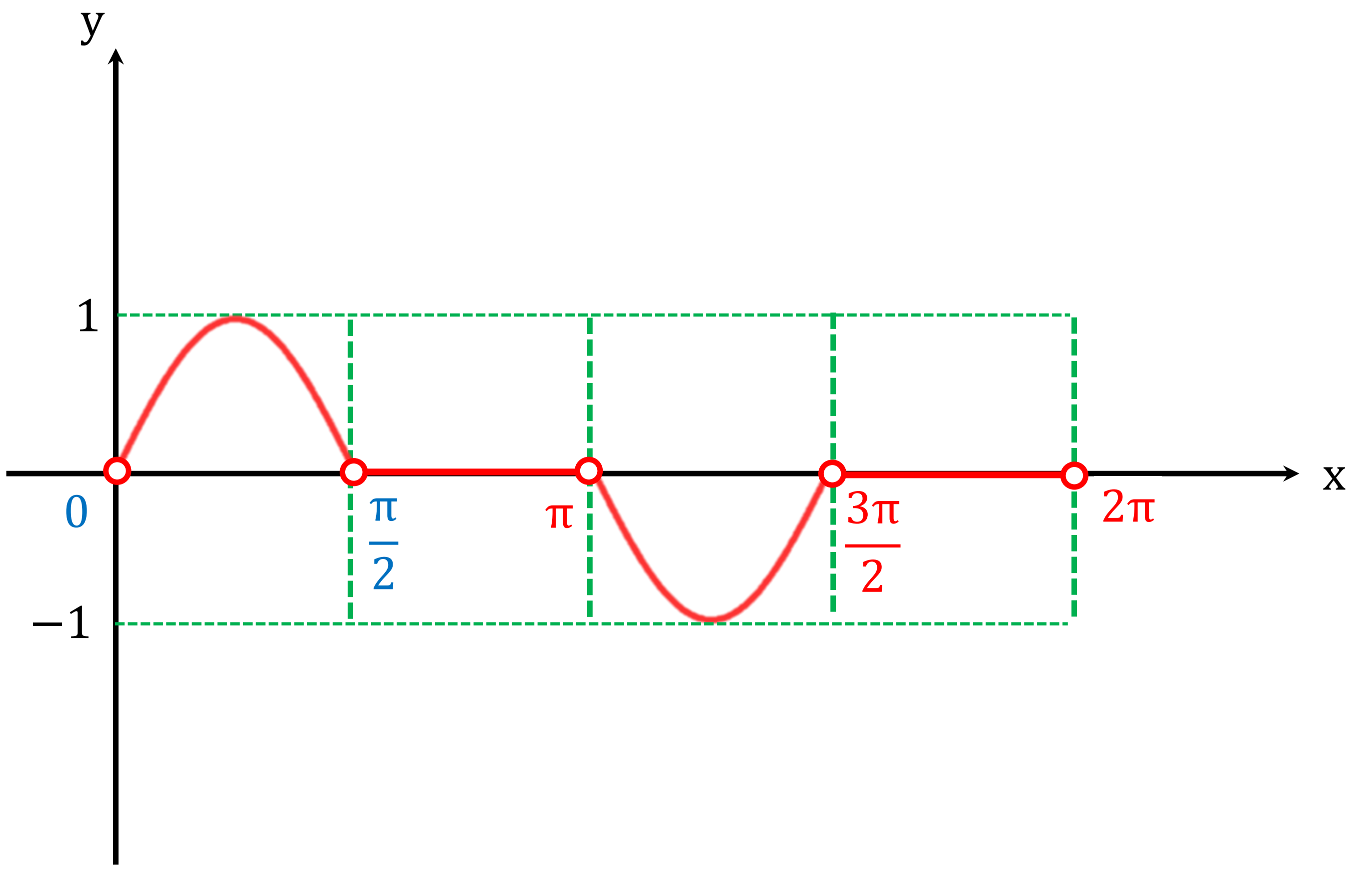
$$f(x) = \text{Senx}|\text{Cosx}| + \text{Cosx}|\text{Senx}|$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2} \longrightarrow f(x) = \text{Senx}(\text{Cosx}) + \text{Cosx}(\text{Senx}) \longrightarrow f(x) = \text{Sen}2x$ 1

$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi \longrightarrow f(x) = \text{Senx}(-\text{Cosx}) + \text{Cosx}(\text{Senx}) \longrightarrow f(x) = 0$ 3

$\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \longrightarrow f(x) = \text{Senx}(-\text{Cosx}) + \text{Cosx}(-\text{Senx}) \longrightarrow f(x) = -\text{Sen}2x$ 5

$\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \longrightarrow f(x) = \text{Senx}(\text{Cosx}) + \text{Cosx}(-\text{Senx}) \longrightarrow f(x) = 0$ 7



$$\therefore \mathbf{T = 2\pi}$$

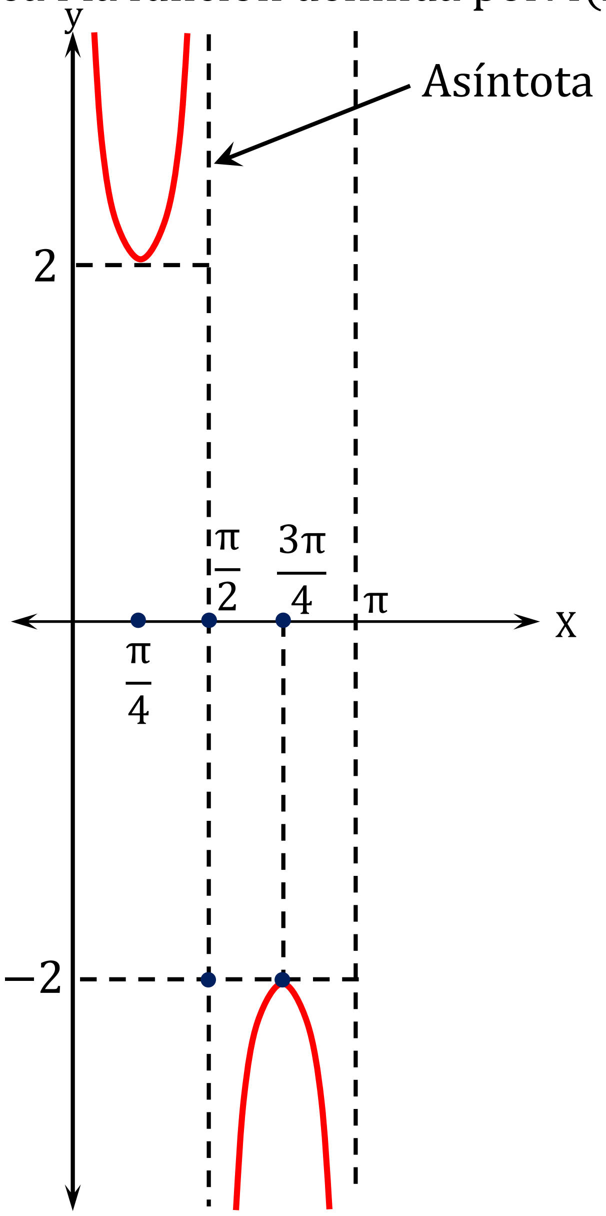
2

4

6

CLAVE: A

13. Sea f la función definida por: $f(x) = 2\text{Sec}(Ax + B), (A > 0)$ cuya gráfica se muestra a continuación. Calcula A / B.



Resolución:

Del gráfico el desfase es $\frac{\pi}{4}$

$$-\frac{B}{A} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{A}{B} - \frac{4}{\pi}$$

Del gráfico: $T = \pi$

$$\frac{2\pi}{A} = \pi \longrightarrow A = 2$$

CLAVE: E

14. Halle el rango de la función f definida por: $f(x) = \dfrac{|Secx| - Sec^2x}{|Secx| - 1}$

Resolución:

$$|Secx| - 1 \neq 0$$
$$|Secx| \neq 1$$
$$Secx \neq \pm 1$$

$$f(x) = \frac{|Secx| - |Secx|^2}{|Secx| - 1}$$

$$f(x) = \frac{|Secx|[1 - |Secx|]}{|Secx| - 1}$$

$$f(x) = -|Secx|$$

$$-\infty < Secx < -1 \quad \vee \quad 1 < Secx < \infty +$$

$$\underbrace{+\infty > |Secx| > 1 \quad \vee \quad 1 < |Secx| < \infty +}$$

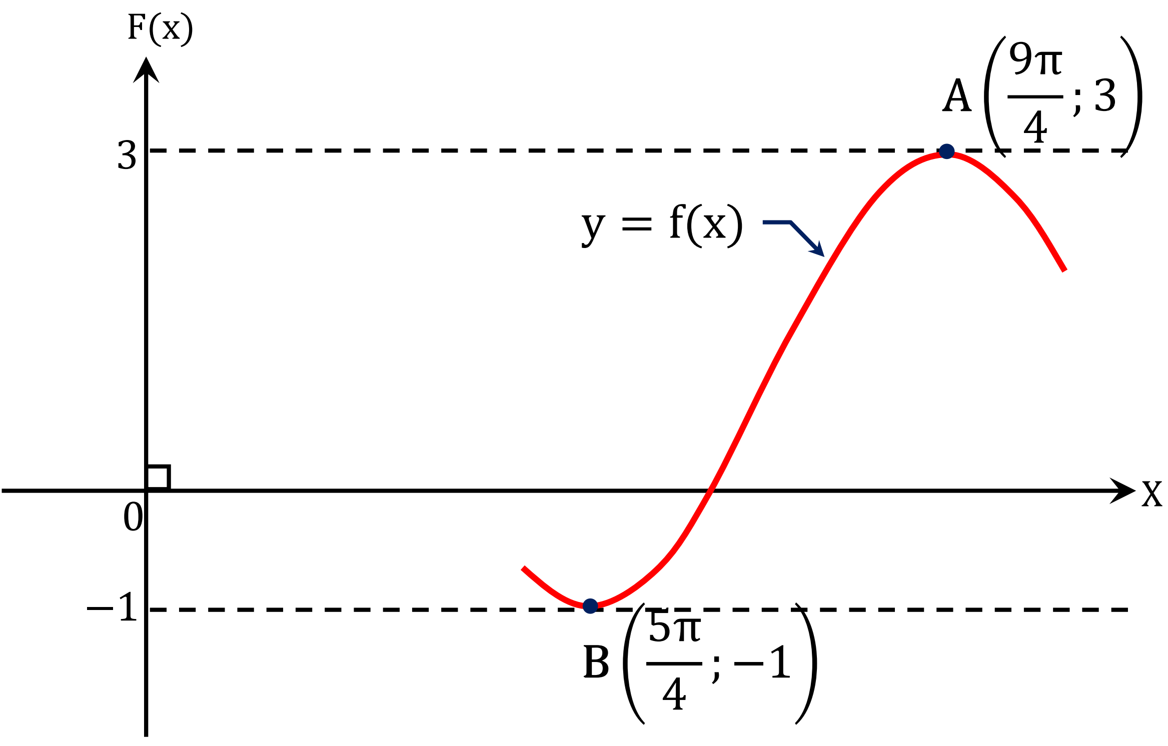
$$1 < |Secx| < \infty +$$

$$-1 > |Secx| > -\infty$$

$$\therefore \mathbf{R_F}]-\infty; -1[$$

CLAVE: E

15. Si las coordenadas de los puntos A y B son $\left(\frac{9\pi}{4};3\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4};-1\right)$, respectivamente, determinar la correspondencia de la función trigonométrica generalizada que corresponde a f(x).



Resolución:

$$f(x) = A\text{Cos}(Bx + C) + D$$

$$A = \frac{3-(-1)}{2} \longrightarrow A = 2$$

$$\frac{T}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \frac{T}{2} = \pi \longrightarrow \frac{\pi}{B} = \pi \longrightarrow B = 1$$

$$-\frac{C}{B} = \frac{5\pi}{4} - \frac{T}{2} \rightarrow -\frac{C}{B} = \frac{5\pi}{4} - \pi \rightarrow -C = 1\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow C = -\frac{\pi}{4}$$

$$D = \frac{3+(-1)}{2} \longrightarrow D = 1$$

CLAVE: B

$$\therefore \mathbf{F(x) = 2Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1}$$

16. Determinar el rango de la función f, si su regla de correspondencia es: $f(x)=\dfrac{\mathrm{Cot}\frac{x}{2}\,\mathrm{Secx}}{\mathrm{Cscx}+2\mathrm{Csc2x}}$

Resolución:

$$f(x)=\frac{\mathrm{Cot}\frac{x}{2}\,\mathrm{Secx}}{\mathrm{Cscx}+2\mathrm{Csc2x}}$$

$$f(x)=\frac{(\mathrm{Cscx}+\mathrm{Cotx})\mathrm{Secx}}{\mathrm{Cscx}+\mathrm{Cotx}+\mathrm{Tanx}}$$

$$f(x)=\frac{\mathrm{Cscx}.\mathrm{Secx}+\mathrm{Cotx}.\mathrm{Secx}}{\mathrm{Cscx}+\mathrm{Cotx}+\mathrm{Tanx}}$$

$$f(x)=\frac{\mathrm{Tanx}+\mathrm{Cotx}+\mathrm{Cscx}}{\mathrm{Cscx}+\mathrm{Cotx}+\mathrm{Tanx}}$$

$$f(x)=1$$

$$\therefore\ \mathbf{R_F=\{1\}}$$

CLAVE: D

17. Halle el rango de la función f definida por: $f(x) = (\text{Senx} - \text{Cscx})(\text{Cosx} - \text{Secx})$

Resolución:

$$f(x) = \left(\text{Senx} - \frac{1}{\text{Senx}}\right)\left(\text{Cosx} - \frac{1}{\text{Cosx}}\right)$$

$$\text{Senx} \neq 0 \ \wedge \text{Cosx} \neq 0$$

$$x \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$f(x) = \left(\frac{\text{Sen}^2x - 1}{\text{Senx}}\right)\left(\frac{\text{Cos}^2x - 1}{\text{Cosx}}\right)$$

$$2x \neq k\pi$$

$$f(x) = \left(\frac{-\text{Cos}^2x}{\text{Senx}}\right)\left(\frac{-\text{Sen}^2x}{\text{Cosx}}\right)$$

$$-1 \leq \text{Sen}2x \leq 1 \qquad \text{Sen}2x \neq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\text{Sen}2x \leq \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\text{Sen}2x \neq 0$$

$$f(x) = \text{Senx}.\text{Cosx}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{Sen}2x$$

$$\therefore \mathbf{R_F} = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] - \{\mathbf{0}\}$$

CLAVE: D

18. Halle el dominio de la función f definida por $f(x) = Tan2x + Cot2x + Sec4x$. Dar como respuesta el complemento del dominio de f.

Resolución:

Los puntos de discontinuidad son las asíntotas de la gráfica o el complemento del dominio; es decir los lugares donde la función no está determinada.

$$f(x) = \underbrace{Tan2x + Cot2x} + Sec4x$$

$$f(x) = 2Csc4x + Sec4x$$

$$4x = \frac{k\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{8}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \left\{\frac{\mathbf{k\pi}}{\mathbf{8}} / \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}$$

CLAVE: E

19. Determinar los puntos de discontinuidad de la función definida por: $f(x) = \dfrac{2005}{|Secx| - |Cscx|}$

Resolución:

$$f(x) = \frac{2005}{\underbrace{|Secx| - |Cscx|}_{=0}}$$

$$|Secx| = |Cscx|$$

$$\frac{1}{|Cosx|} = \frac{1}{|Senx|}$$

$$\frac{|Senx|}{|Cosx|} = 1$$

$$|Tanx| = 1$$

$$Tanx = \pm 1$$

$$x = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4}\right\}$$

Secx: ∄ $\longrightarrow x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

Cscx: ∄ $\longrightarrow x = \{k\pi\}$

$$x = \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$$

$$\mathbf{x = \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}}$$

CLAVE: B

20. Hallar el rango y el dominio de la función: $f(x)=\dfrac{|\text{Senx}|}{\text{Senx}}-\dfrac{|\text{Cosx}|}{\text{Cosx}}$

Resolución:

$$f(x)=\frac{|\text{Senx}|}{\text{Senx}}-\frac{|\text{Cosx}|}{\text{Cosx}}$$

Dominio:

$$\text{Senx}\neq 0\ \wedge \text{Cosx}\neq 0$$

$$x\neq\frac{k\pi}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{D_f}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\mathbf{k\pi}}{\mathbf{2}}\right\}$$

Rango:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\longrightarrow f(x)=\frac{\text{Senx}}{\text{Senx}}-\frac{\text{Cosx}}{\text{Cosx}}\longrightarrow f(x)=0$$

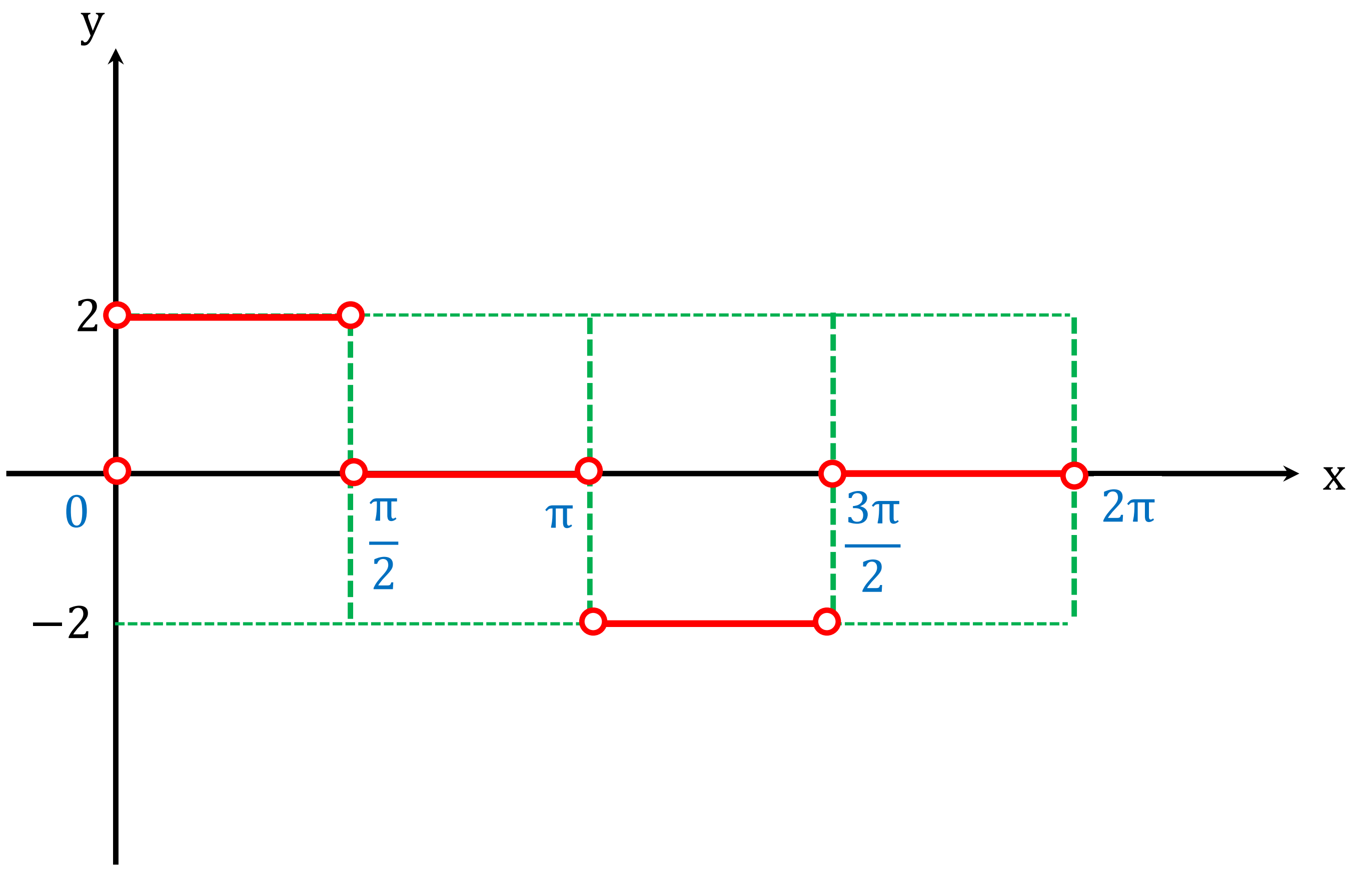
$$\frac{\pi}{2}<x<\pi\longrightarrow f(x)=\frac{\text{Senx}}{\text{Senx}}-\frac{-\text{Cosx}}{\text{Cosx}}\longrightarrow f(x)=2$$

$$\pi<x<\frac{3\pi}{2}\longrightarrow f(x)=\frac{-\text{Senx}}{\text{Senx}}-\frac{-\text{Cosx}}{\text{Cosx}}\longrightarrow f(x)=0$$

$$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi\longrightarrow f(x)=\frac{-\text{Senx}}{\text{Senx}}-\frac{\text{Cosx}}{\text{Cosx}}\longrightarrow f(x)=-2$$

CLAVE: B

$$\therefore\ \mathbf{R_f}=\{\mathbf{-2;0;2}\}$$



$\therefore \mathbf{T = 2\pi}$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS